







NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1862.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE.

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME PREMIER.

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE ET DE BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1862



PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE.

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie,
Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME PREMIER.

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE ET DE BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1862



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DÉMONSTRATIONS NOUVELLES

du théorème de Legendre sur les triangles sphériques dont les côtés sont très-petits relativement au rayon de la sphère (*);

PAR M. A. TISSOT.

Dans la résolution de chacun des triangles que l'on forme à la surface de la terre, soit pour déterminer la longueur d'un arc de méridien, soit pour construire la carte d'un pays, on connaît toujours les angles ainsi que l'un des côtés, et il s'agit d'obtenir les deux autres côtés du triangle. Si l'on voulait alors employer les formules de la trigonométrie sphérique, on aurait à faire usage de la plus simple de toutes, *l'analogie des quatre sinus;* cependant une pareille méthode ne saurait convenir pour la rapidité des calculs, car c'est la longueur du côté de départ qui est donnée directement, non le nombre de subdivisions du degré qu'il contient, et c'est aussi en les rapportant à l'unité de longueur que l'on veut évaluer les

(*) Voir, t. XV, p. 354 et t. XVI, p. 53, une discussion sur ce théorème entre deux géomètres de grand mérite et qui m'a aliéné l'amitié de l'un d'eux : *Genus irritabile geometrarum*. TM.

deux autres côtés. La même méthode conviendrait encore moins pour l'exactitude des résultats ; en effet, quand bien même le rayon de la sphère qu'il faudrait employer serait suffisamment connu, les angles au centre correspondants aux côtés étant très-petits, les Tables trigonométriques ordinaires ne fourniraient pas assez d'approximation. On a donc imaginé d'autres procédés ; le plus généralement employé est celui de Legendre, qui consiste à substituer la résolution d'un triangle rectiligne à celle du triangle sphérique.

Les appareils destinés aux opérations géodésiques de 1787, pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, ne pouvaient manquer de donner à la mesure des angles une précision jusqu'alors inconnue. Tandis que Ramsden perfectionnait le théodolite dont les Commissaires anglais firent usage, Lenoir construisait sous les yeux de Borda, et en appliquant le principe imaginé par Tobie Meyer, l'instrument devenu depuis si célèbre sous le nom de *cercle répétiteur*. Il fallait mettre les méthodes de calcul à la hauteur des moyens d'observation ; c'est en cherchant à atteindre ce but que Legendre fut conduit à son théorème sur les triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. Il en donna seulement l'énoncé dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1787), et ne publia la démonstration qu'en l'an VII dans un travail servant de préface à un ouvrage de Delambre intitulé : *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien*. Dans ce même ouvrage, se trouve une autre démonstration imaginée par Delambre qui l'a également exposée dans le chapitre XXXV de son *Traité d'Astronomie*. Le VIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique* renferme une troisième démonstration due à Lagrange ; c'est celle que Legendre a adoptée définitivement et qu'il a re-

produite dans sa *Trigonométrie sphérique*. Enfin, dans le *Journal de Crelle*, t. XXII, Gauss en a donné une quatrième dont le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1841) contient une traduction. Dans ses *Recherches générales sur les surfaces courbes*, il a même étendu le théorème de Legendre aux triangles formés par les lignes les plus courtes sur une surface courbe quelconque.

Les démonstrations de Legendre, de Delambre et de Gauss ne sont à proprement parler que des vérifications à posteriori : la première manque de rigueur, la seconde est compliquée et la troisième omet une partie importante dans les applications, celle qui est relative au calcul de l'excès sphérique; aussi est-ce la démonstration de Lagrange que l'on reproduit généralement, mais elle nécessite des calculs assez longs. Après avoir développé l'énoncé du théorème, je me propose d'en donner deux autres démonstrations exemptes des inconvénients des trois premières et plus simples que celle de Lagrange.

A un triangle sphérique quelconque, il est bien clair qu'il correspond toujours un triangle rectiligne ayant les mêmes côtés et dont on peut substituer la résolution à celle du premier; la question est de savoir comment on doit modifier les angles du triangle sphérique pour obtenir ceux du triangle rectiligne. Soient A, B, C les trois premiers, A', B', C' les trois autres, a, b, c les longueurs des côtés communs aux deux triangles, le rayon de la sphère étant pris pour unité, enfin x, y, z les différences $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$, différences qu'il s'agit de déterminer et dont on ne connaît encore que la somme, laquelle est égale à l'excès sphérique ε. Le triangle étant supposé formé à la surface de la terre, les rapports a, b, c sont très-petits, et l'on peut ne pas tenir compte de leurs quatrièmes puissances dans les valeurs de x, y, z;

cela revient à altérer les angles de quantités toujours inférieures à 0″,02 et par conséquent bien au-dessous des erreurs d'observation. Si l'on néglige ainsi les termes du quatrième ordre (*), chaque angle du triangle rectiligne sera égal à l'angle correspondant du triangle sphérique diminué du tiers de l'excès sphérique; de plus les deux triangles seront égaux en surface. Ainsi l'on aura, en appelant T la surface du triangle rectiligne,

$$x = y = z = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{T}{3} = \frac{bc \sin A'}{6} = \frac{a^2 \sin B' \sin C'}{6 \sin A'}.$$

Tel est le théorème de Legendre.

Première démonstration. — Nous partirons des formules bien connues

$$\tang \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\tang \frac{1}{2} A' = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

où p représente le demi-périmètre pour l'un et l'autre triangle; dans la première, nous pouvons remplacer chacun des quatre sinus par son développement borné à deux termes et prendre par exemple

$$\sin p = p - \frac{1}{6}p^3 = p\left(1 - \frac{1}{6}p^2\right);$$

alors la valeur ci-dessus de $\tang \frac{1}{2} A'$ se trouvera en fac-

(*) Bientôt une méthode où l'on tient compte du quatrième ordre et même, si l'on veut, d'un ordre quelconque, par M. Grunert. Tr.

teur dans le second membre, et l'autre facteur sera

$$\left\{\frac{\left[1-\frac{1}{6}(p-b)^2\right]\left[1-\frac{1}{6}(p-c)^2\right]}{\left(1-\frac{1}{6}p^2\right)\left[1-\frac{1}{6}(p-a)^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[1+\frac{p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2}{6}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}bc\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{6}bc;$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\operatorname{tang}\frac{1}{2}A'\left(1+\frac{1}{6}bc\right).$$

On a aussi

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A'+x)=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}A'+\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}A'\operatorname{tang}\frac{1}{2}x};$$

or x est du même ordre de petitesse que ε ou que la surface du triangle sphérique, c'est-à-dire du second ordre; nous pouvons donc négliger x^2 et alors la dernière égalité devient

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\operatorname{tang}\frac{1}{2}A'\left(1+\frac{x}{\sin A'}\right).$$

En comparant cette nouvelle expression avec la première, on voit qu'il faut prendre

$$x=\frac{1}{6}bc\sin A'=\frac{1}{3}T;$$

à cause de la symétrie, les valeurs de y et de z seront aussi égales à $\frac{1}{3}T$ et la somme ε à T.

Seconde démonstration. — La formule qui sert à cal-

culer le côté d'un triangle sphérique, quand on connaît les trois angles, est

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\left(A+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\sin\left(B+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\sin\left(C+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}},$$

on en tire

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\,\frac{\sin\left(B+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\sin\left(C+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\sin\left(A+\frac{1}{2}\varepsilon\right)},$$

ou, en négligeant le quatrième ordre,

$$\varepsilon = \frac{a^2\sin B'\sin C'}{2\sin A'} = T.$$

Cela posé, on a

$$\frac{\sin A}{\sin A'} = \frac{\sin(A+x)}{\sin A'} = 1 + x\cot A',$$

$$\frac{a}{\sin a} = 1 + \frac{1}{6}a^2 = 1 + \frac{1}{12}a^2 + \frac{b^2+c^2-2bc\cos A'}{12}$$

$$= 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{12} - \frac{1}{3}T\cot A';$$

si l'on multiplie membre à membre, il viendra

$$\frac{a}{\sin A'}\cdot\frac{\sin A}{\sin a} = 1 + \frac{a^2+b^2+c^2}{12} + \left(x - \frac{1}{3}T\right)\cot A'.$$

Le premier membre de cette dernière égalité ne doit pas changer quand on y remplace a par b et A par B, ou encore a par c et A par C; il faut donc qu'il en soit de même du second, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{x-\frac{1}{3}T}{\operatorname{tang}A'} = \frac{y-\frac{1}{3}T}{\operatorname{tang}B'} = \frac{z-\frac{1}{3}T}{\operatorname{tang}C'}$$

$$= \frac{\varepsilon - T}{\operatorname{tang}A'+\operatorname{tang}B'+\operatorname{tang}C'} = 0,$$

et, par conséquent,

$$x = y = z = \frac{1}{3} T.$$

Les triangles relatifs aux opérations de 1787 sont les premiers pour lesquels on se soit préoccupé de l'excès sphérique; auparavant cet excès restait confondu avec les erreurs d'observation, et comme on répartissait le tout également entre les trois angles, on suivait instinctivement, pour les triangles principaux, la méthode à laquelle le théorème de Legendre a conduit. Mais dans les triangles partiels que determine la méridienne, l'un des angles est inconnu, et le calcul de l'excès sphérique, tel que permet de le faire la méthode de Legendre, devient nécessaire. D'ailleurs ce calcul a l'avantage, lorsqu'il s'agit des triangles principaux, de donner les erreurs d'observation pour la somme des trois angles.

DIFFÉRENCES ET DÉRIVÉES
d'un ordre quelconque des deux fonctions circulaires
$\sin(ax + b)$, $\cos(ax + b)$

(voir t. IX, p. 29);

Par M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur à Paris.

1. *Notations.* — Pour simplier l'écriture, on conviendra de désigner

$$2\sin\frac{a\Delta x}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a\Delta x + \pi}{2}$$

respectivement par A et B.

2. Problème I. — *Trouver la différence de l'ordre m*

de la fonction

$$y = \sin(ax + b),$$

quel que soit le nombre entier et positif m.

Solution. — Si l'on donne à la variable indépendante x un accroissement Δx, la fonction y prend un accroissement correspondant Δy, et l'on a

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(ax + b + a\Delta x) - \sin(ax + b) \\ &= \mathrm{A} \cos\left(ax + b + \frac{a\Delta x}{2}\right); \end{aligned}$$

mais

$$\cos\left(ax + b + \frac{a\Delta x}{2}\right) = \sin\left(ax + b + \frac{a\Delta x + \pi}{2}\right),$$

donc

$$\Delta y = \mathrm{A} \sin(ax + b + \mathrm{B}),$$

ce qui montre que la différence première de la fonction $\sin(ax + b)$ est le produit du facteur constant A par ce que devient la fonction donnée lorsqu'on augmente l'arc $ax + b$ de la constante B.

Cela posé, si l'on a égard à la règle qui donne la différence première d'un produit de deux facteurs dont l'un est constant, on aura immédiatement

$$\Delta^2 y = \mathrm{A}^2 \sin(ax + b + 2\mathrm{B}),$$
$$\Delta^3 y = \mathrm{A}^3 \sin(ax + b + 3\mathrm{B}),$$

et, en général,

$$\Delta^m y = \mathrm{A}^m \sin(ax + b + m\mathrm{B}). \tag{1}$$

On démontrerait la généralité de cette formule par l'emploi de la méthode de Newton, dite *de proche en proche.*

3. *Observation.* — Dans les Traités de Calcul infinité-

simal où l'on s'occupe du problème précédent, on trouve deux formules pour représenter $\Delta^m y$. De plus, dans l'une de ces formules on distingue le cas où m est simplement pair et celui où m est doublement pair; dans l'autre on fait les mêmes distinctions pour $m-1$. La formule (1) convenant à tous les cas, sans qu'il soit nécessaire de faire aucune hypothèse sur m, fournit donc une réponse plus simple du problème ci-dessus.

4. *Corollaire I.* — Si l'on divise les deux membres de l'équation (1) par Δx^m, on aura

$$\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m} = a^m \left(\frac{A}{a\Delta x}\right)^m \sin(ax + b + m\mathrm{B}).$$

Si l'on suppose que Δx décroisse indéfiniment de manière à pouvoir différer de zéro, d'aussi peu que l'on voudra, on aura à la limite

$$\frac{d^m y}{dx^m} = a^m \sin\left(ax + b + m\frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

5. *Corollaire II.* — Si l'on fait dans cette formule $b=0$, et $a=1$, il vient

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sin\left(x + m\frac{\pi}{2}\right). \tag{3}$$

On peut trouver la formule (3) directement en suivant une méthode employée dans le problème I.

6. Problème II. — *Trouver la différence de l'ordre m de la fonction*

$$y_1 = \cos(ax + b),$$

quel que soit le nombre entier et positif m.

Première solution. — On suit une méthode semblable à

celle employée dans le problème I, et l'on parvient à la formule suivante

$$(4) \qquad \Delta^m y_1 = A^m \cos(ax + b + mB).$$

Seconde solution. — On peut faire dépendre la solution du problème II de celle du problème I de la manière suivante :

On a l'égalité

$$\cos(ax + b) = \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right);$$

prenant la différence de l'ordre m de chaque membre, on a immédiatement, en vertu du problème I,

$$\Delta^m y_1 = A^m \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2} + mB\right).$$

Si l'on retranche $\frac{\pi}{2}$ à cet arc, le sinus se change en cosinus, et l'on retrouve l'équation (4).

7. *Corollaire I.* — La formule (4) donne

$$\frac{\Delta^m y_1}{\Delta x^m} = a^m \left(\frac{A}{a\Delta x}\right)^m \cos(ax + b + mB);$$

faisant tendre Δx indéfiniment vers zéro, de manière à en différer de moins toute quantité donnée, on aura à la limite

$$(5) \qquad \frac{d^m y_1}{dx^m} a^m \cos\left(ax + b + m\frac{\pi}{2}\right).$$

8. *Corollaire II.* — Si l'on fait dans cette formule $a = 1$ et $b = 0$, il vient

$$(6) \qquad \frac{d^m y_1}{dx^m} = \cos\left(x + m\frac{\pi}{2}\right).$$

On peut trouver la formule (6) directement en suivant une méthode semblable à celle du problème I.

9. *Scolies.* — Les formules (1) et (4) donnent les relations suivantes

$$(\Delta^m y)^2 + (\Delta^m y_1)^2 = (\mathrm{A}^m)^2$$

et

$$\frac{\Delta^m y}{\Delta^m y_1} = \operatorname{tang}(ax + b + m\mathrm{B}).$$

Les formules (2) et (5) donnent

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + \left(\frac{d^m y_1}{dx^m}\right)^2 = (a^m)^2$$

et

$$\frac{d^m y}{dx^m} : \frac{d^m y_1}{dx^m} = \operatorname{tang}\left(ax + b + m\frac{\pi}{2}\right).$$

10. *Historique.* — Les formules (3) et (6) sont dues à M. Hoëné Wronski. On les trouve à la page 451 de celui de ses ouvrages qui a pour titre: *Philosophie de la Technie algorithmique*. Ce savant est arrivé à ces deux formules en prenant les dérivées de l'ordre m des deux membres de chacune des relations

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right), \tag{7}$$

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right). \tag{8}$$

Nous dirons en passant que les formules (7) et (8) sont dues à Jean Bernoulli, bien qu'elles aient été publiées pour la première fois par Léonard Euler.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. STEINER;

PAR M. J. MENTION.

Les derniers volumes des *Annales de Gergonne* renferment plusieurs théorèmes très-beaux, énoncés sans démonstration par M. Steiner. Il me semble qu'ils sont encore, presque tous, à démontrer. J'extrairai le suivant du t. XVIII, p. 302 : « Dans chacun des quatre triangles » formés par les côtés d'un quadrilatère, il y a un cercle » inscrit et trois cercles ex-inscrits; ce qui fait en tout » seize cercles, dont les centres sont quatre à quatre sur » une circonférence, de manière à donner naissance à » huit nouveaux cercles. Ces huit nouveaux cercles se » partagent en groupes, tels que chacun des quatre cercles » de l'un de ces groupes coupe orthogonalement tous les » cercles de l'autre groupe; on en conclut que les centres » des cercles des deux groupes sont sur deux droites per- » pendiculaires l'une à l'autre. Enfin ces deux dernières » droites se coupent au point de rencontre des cercles » circonscrits aux quatre triangles. »

La propriété relative au point d'intersection des lignes de centres fera l'objet de cette Note, le reste n'offrant aucune difficulté.

I.

L'occasion se présente ici de revenir sur quelques théorèmes de géométrie, d'où la proposition actuelle découle naturellement.

Pour éviter de très-longues périphrases j'appellerai : 1° *cercle des hauteurs* d'un triangle, le cercle ayant pour

centre le point de rencontre de celles-ci et un rayon moyen proportionnel entre les segments dans lesquels chaque hauteur est divisée au centre même; 2° *ligne des hauteurs* d'un quadrilatère, la droite passant par les points de rencontre des hauteurs dans les quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère; 3° *triangle diagonal*, le triangle formé par les trois diagonales.

On se souviendra que les circonférences, décrites sur les diagonales d'un quadrilatère comme diamètres, ont pour axe radical la ligne des hauteurs; la médiane étant d'ailleurs un axe radical commun aux cercles de hauteurs des triangles du quadrilatère. La ligne des hauteurs contient aussi le centre du cercle circonscrit au triangle diagonal. Si les circonférences de la première série, c'est-à-dire celles décrites sur les diagonales, ne se coupent pas, les circonférences de la seconde couperont la médiane en deux *points-limites*, qui sont les centres de deux hyperboles équilatères tangentes aux côtés du quadrilatère.

Un théorème, déjà démontré directement, comporte cet énoncé plus complet et plus instructif :

« Les cinq médianes des quadrilatères qu'on peut
» construire avec les côtés d'un pentagone se coupent en
» un même point, centre radical commun aux quinze
» cercles suivants, savoir : les dix cercles de hauteurs et
» les cinq circonscrits aux triangles diagonaux. »

Car les quadrilatères ayant, deux à deux, un triangle en commun, le point de concours de deux médianes quelconques sera de commune puissance par rapport aux sept circonférences de hauteurs différentes, dans les deux quadrilatères correspondants. Or, parmi les sept centres de circonférences, quatre au moins appartiendront à une même droite qui sera la ligne des hauteurs d'un troisième quadrilatère. Donc la médiane de celui-ci passera par le point de commune puissance.

Il est à remarquer que, d'après le beau théorème de M. Faure, on constatait l'existence du centre radical commun aux cinq cercles déterminés par les points de concours respectifs des diverses diagonales.

II.

Théorème. — *Les bissectrices des angles d'un quadrilatère complet fournissent douze points de rencontre, en ne combinant que celles qui partent de sommets opposés : les points de rencontre des bissectrices internes et ceux des bissectrices externes, d'une part ; les points appartenant à la fois aux bissectrices internes et externes, d'autre part ;*

1° *Deux points internes sont en ligne droite avec le troisième externe, ainsi que les trois externes.*

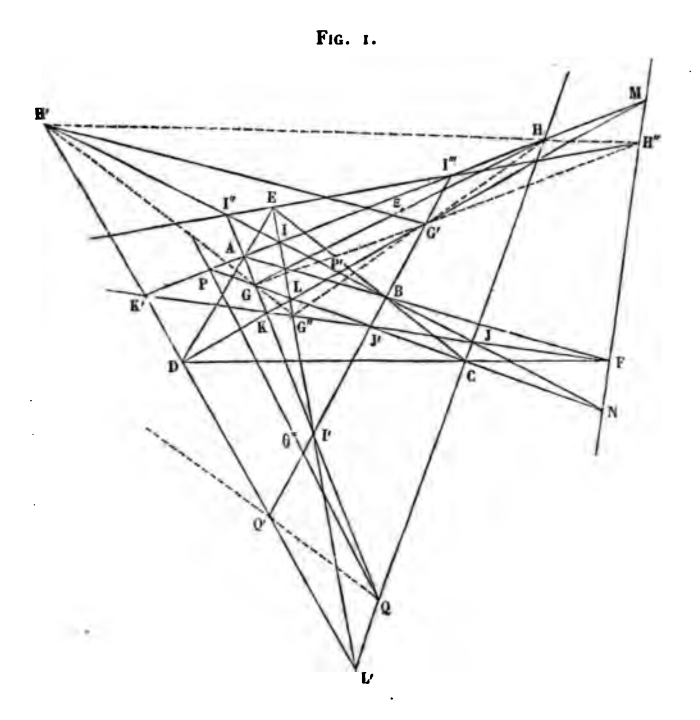
2° *Trois points internes-externes, choisis de manière que trois bissectrices similaires n'aboutissent point à des sommets situés sur un même côté, sont également en ligne droite.*

Je vais démontrer, par exemple, que les points de concours G, G′ des bissectrices internes issues des sommets A, C, B, D, et le point H″ des bissectrices externes issues des sommets E, F, sont en ligne droite. Considérons le triangle I′I″I‴ ayant pour côtés les bissectrices externes du triangle ABE, et celui qui aura pour côtés les bissectrices DL, CN, FM (*fig.* 1). Leurs sommets se trouvent évidemment deux à deux, sur trois droites NI″, MI‴, LI′ concourent en un même point I; donc, en vertu d'un théorème bien connu, les points d'intersection (I″I‴, MN), (I″I′, ML), (I′I‴, ML) seront en ligne droite. c. q. f. d.

La démonstration est tout à fait analogue pour les autres points de rencontre indiqués. On ne les représente

pas tous sur la figure, qui, pour être complète, exigerait un cadre plus large que celui du présent recueil.

Fig. 1.



Il résulte de là que les douze points se partagent en deux groupes qui sont les sommets de quadrilatères complets. Le théorème s'applique au quadrilatère sphérique, et la démonstration précédente ne subit aucun changement.

III.

Théorème. — *Les deux quadrilatères ayant pour sommets les points de rencontre des bissectrices opposées internes ou externes, et les points de rencontre internes*

externes, sont tels, que la médiane de l'un coïncide avec la ligne des hauteurs de l'autre.

Soit IJL′K′ (*fig.* 1) le quadrilatère inscriptible formé par les intersections consécutives des bissectrices externes; LII′ et J′KK′ seront les bissectrices internes des angles E et F. En se rappelant que les hauteurs du triangle diagonal d'un quadrilatère inscrit au cercle se coupent précisément au centre de ce cercle, on observe que le cercle passant par les points I, J, L′, K′ a son centre au point de rencontre des hauteurs du triangle G″HH′; de même pour les cercles LJ′KI′,.... Donc la ligne des hauteurs du quadrilatère GG′HH′H″G″ est aussi la ligne des centres du premier groupe de cercles définis dans l'énoncé de M. Steiner. Pour des motifs tout semblables, la ligne des hauteurs du quadrilatère aux rencontres internes-externes est la ligne des centres du second groupe de cercles.

Remarquons maintenant que les circonférences décrites sur les diagonales comme diamètres, dans les deux quadrilatères actuels, viennent se joindre aux deux groupes de cercles IJL′K′,..., qui en sont *les cercles de hauteurs*. Donc la ligne des hauteurs de l'un est la médiane de l'autre, et réciproquement.

Les deux groupes constituent dès lors une double série de cercles orthogonaux; ce que j'ai annoncé être susceptible de preuve à priori et très-facilement.

Avant de poursuivre mes investigations, je récapitulerai ainsi les déductions acquises : Les deux quadrilatères de bissectrices jouissent de la même double série de cercles orthogonaux, et chaque série admet huit cercles différents, puisque aux cercles de M. Steiner s'ajoutent, de chaque côté, les trois cercles décrits sur les diagonales et le cercle circonscrit au triangle diagonal.

(*La fin prochainement.*)

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. STEINER;

PAR M. PAUL SERRET.

1. *Lemme.*— Un triangle se mouvant dans l'espace, de manière que ses trois côtés tournent respectivement autour de trois points *donnés*, en ligne droite; et ses deux premiers sommets décrivant deux plans *indéfinis* (ou deux courbes *déterminées* situées dans ces plans) : le sommet *libre* du triangle décrit au troisième plan (on une troisième courbe plane), et les trois plans se coupent suivant une même droite.

Que l'on *projette,* en effet, le triangle mobile, sur un plan quelconque, *par des droites parallèles* à l'intersection des plans décrits par les deux premiers sommets; la projection présentera un triangle mobile, dont les côtés pivotent autour de trois points fixes en ligne droite, et dont les deux premiers sommets glissent sur deux droites fixes, traces des deux plans donnés sur le plan de projection. Mais, dans ces conditions et suivant un théorème connu, le sommet libre du triangle projeté décrit une droite passant par le point de concours de ces deux traces : et le sommet libre du triangle primitif se meut dans un plan qui passe par l'intersection des plans décrits par les deux premiers sommets.

2. THÉORÈME. *Trois cônes, du degré m, ont leurs sommets en ligne droite; et deux de leurs trois courbes d'intersection sont planes : la troisième courbe est plane comme les deux premières; et les plans des trois courbes se coupent suivant une même droite.* (STEINER.)

Imaginons que l'on ait en vue de construire par points l'intersection de deux quelconques des trois cônes donnés : l'on devra, suivant la méthode ordinaire, mener une série de plans auxiliaires par la droite de leurs sommets, et combiner les génératrices des deux cônes, situées dans chacun de ces plans. D'ailleurs, comme les sommets des trois cônes sont ici en ligne droite, les plans auxiliaires, que l'on aura menés en vue de l'une des trois courbes d'intersection, serviront encore pour les deux autres.

Considérons donc l'un de ces plans auxiliaires, menés par la droite des sommets; et, dans ce plan, l'un des triangles ayant pour premier, second et troisième côtés, l'une des génératrices du premier, second et troisième cônes, situées dans ce plan. Faisons ensuite tourner ce plan auxiliaire et le triangle qu'il renferme, autour de la droite des sommets : nous aurons un triangle mobile, dont les sommets décrivent les courbes d'intersection des trois cônes pris deux à deux; et dont les côtés pivotent autour de trois points fixes, les sommets des trois cônes, situés en ligne droite. D'ailleurs, les courbes, décrites par deux des sommets de ce triangle, sont planes, d'après l'hypothèse : la courbe décrite par le troisième sommet est donc plane également, d'après le lemme; et les plans des trois courbes se coupent suivant une même droite.

Remarque. — On peut, à l'aide d'un calcul assez simple, *vérifier* analytiquement la proposition.

NOTE SES LES ASYMPTOTES;

PAR M. PAUL SERRET.

L'asymptote d'une branche infinie de courbe est la limite des positions occupées par une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment sur cette branche.

L'asymptote étant prise pour axe des y, et les axes étant rectangulaires; que l'on considère, en même temps que la courbe proposée, une courbe auxiliaire *à ordonnées réciproques :* et soient sur ces deux courbes, M et m deux points qui correspondent à une même abscisse.

D'après le choix des axes et la nature de la courbe donnée, à mesure que le point M s'éloigne indéfiniment sur cette courbe, son abscisse tend vers zéro, et son ordonnée augmente indéfiniment : les deux coordonnées du point correspondant m tendent donc simultanément vers zéro; la courbe auxiliaire passe par l'origine, et la *soustangente* de cette courbe a pour limite zéro. D'ailleurs, les *sous-tangentes,* prises en des points *correspondants* de deux courbes à ordonnées réciproques, *sont égales et de sens contraires :* la sous-tangente de la courbe primitive en M a donc pour limite zéro, comme l'abscisse du pointM; et la trace, sur l'axe des x, de la tangente en M a pour limite l'origine, c'est-à-dire un point de l'asymptote.

En outre, en désignant par i l'inclinaison de la tangente en M sur l'asymptote Oy, l'on a

$$\text{tang}\, i = \frac{\text{S.T}}{\text{Y}}.$$

Mais la sous-tangente S.T a pour limite zéro; l'ordonnée

Y grandit indéfiniment : l'angle i a donc pour limite zéro ; et la limite des tangentes est parallèle à l'asymptote Oy. Donc, etc.

Remarque. — La démonstration serait en défaut, en même temps que le théorème, si l'origine des coordonnées devenait un *point-asymptote* de la courbe auxiliaire.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE NEWTON ;

PAR M. PAUL SERRET.

---

1. *Si quatre forces sont représentées en grandeur, direction et sens, par les droites qui vont*, de *deux sommets opposés d'un quadrilatère* ABCD, aux *deux autres : la résultante de ces forces est représentée, de la même manière, par le quadruple de la droite qui réunit les milieux des diagonales du quadrilatère.*

L'évidence de ce lemme étant reconnue, imaginons une ellipse quelconque inscrite dans le quadrilatère ABCD ; et regardons chacune des forces, représentées par l'un des côtés de ce quadrilatère, comme décomposée en deux forces partielles par le point de contact de l'ellipse considérée sur ce côté. Il résultera de cette décomposition huit forces ; soit quatre systèmes de deux forces : les deux forces de chaque système étant appliquées à l'un des quatre sommets du quadrilatère, et représentées par les tangentes menées de ce sommet à l'ellipse, ou par les prolongements simultanés de ces tangentes. D'ailleurs, la résultante partielle des deux forces de chaque système est évidemment dirigée suivant un diamètre de l'ellipse ; les quatre résultantes partielles concourent donc au cen-

tre de l'ellipse : et *ce centre appartient* à la résultante générale, c'est-à-dire *à la droite des milieux des diagonales*. C'est le théorème de Newton.

2. Le théorème analogue dans la géométrie de l'espace est celui-ci : « Le lieu des centres des hyperboloïdes à une nappe qui passent par les *côtés* d'un quadrilatère gauche, est la droite des milieux des diagonales de ce quadrilatère; » théorème connu, qui renferme le premier, et qui est à peu près évident.

Que l'on imagine, en effet, par les côtés opposés du quadrilatère, deux systèmes de plans parallèles. Les deux plans de chaque système représenteront, relativement à l'un quelconque des hyperboloïdes considérés, *deux plans tangents parallèles;* le centre de l'hyperboloïde, équidistant de ces deux plans, appartient dès lors au plan diamétral des deux plans de chaque système, ou à l'intersection de ces deux plans diamétraux, ou à la droite des milieux des diagonales.

On peut ajouter que « Les deux diagonales du quadrilatère, et la droite de leurs milieux, sont parallèles à un système de diamètres conjugués de tous les hyperboloïdes considérés. »

Le théorème plan de Newton ne serait-il pas susceptible d'une démonstration *directe* analogue?

3. En cherchant à appliquer au théorème 2, les considérations mécaniques du n° 1, l'on est conduit à un cas particulier du théorème suivant, dont la démonstration directe est facile, mais qui mérite pourtant d'être énoncé : « Le centre de gravité d'un système de poids représentés par les côtés d'un polygone circonscrit à un cercle, et appliqués respectivement aux points de contact de ces côtés, est le centre même de ce cercle. »

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1861.

COMPOSITION DU VENDREDI 2 AOUT 1861.

(Section des sciences.)

Mathématiques.

D'un point P, extérieur à une conique, on mène une sécante PAB. Aux points A et B on mène des tangentes qui se coupent en M. De ce point on abaisse une perpendiculaire sur AB, l'un des pieds de ces perpendiculaires.

Prouver :

1° Que le *lieu* passe en P tangente en ce point;

2° Que le *lieu* est le même pour toutes les coniques homofocales;

3° Que le *lieu* peut être considéré comme le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur certaines droites qui sont tangentes à une courbe dont on demande l'équation.

COMPOSITION DU LUNDI 5 AOUT 1861.

(Section des sciences.)

Physique.

Première question. Du pendule et de son application à la mesure de l'accélération produite par la pesanteur.

Deuxième question. Deux aiguilles aimantées de même disposition, suspendues successivement à un fil de soie sans torsion de manière que les axes soient horizontaux, exécutent sous l'influence de la terre un même nombre n d'oscillations en des temps différents t et t'.

On les suspend toutes deux à un même fil de soie par

l'intermédiaire d'une tige solide non magnétique, de façon que leurs axes soient horizontaux et que les moitiés australes de ces axes fassent l'une avec l'autre un angle donné a.

On demande quelle sera la position d'équilibre de ce système sous l'influence du magnétisme terrestre.

On appliquera la solution générale à l'exemple particulier suivant :

$$n = 100, \quad t = 58'', \quad t' = 63'', \quad a = 178^\circ 40'.$$

SUR LES SECTIONS ANTI-PARALLÈLES ;

PAR M. MARTIN,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet).

La propriété des sections dites *anti-parallèles* ou *sous-contraires* du cône oblique du second degré a été démontrée de bien des manières ; mais je n'ai trouvé, dans aucun traité, la démonstration suivante, de la plus grande simplicité, qui n'exige aucune figure et qui enfin a l'avantage d'être plus générale.

Tout cône du second degré peut être considéré comme cône droit ; il suffit pour cela de le considérer comme ayant pour base une section perpendiculaire à son axe. Le cône étant symétrique par rapport à son axe, si on le coupe par deux plans symétriques eux-mêmes par rapport à cet axe, on obtiendra deux courbes symétriques et par conséquent égales. Si l'une de ces deux courbes est un cercle, l'autre sera aussi un cercle.

Or deux plans symétriques par rapport à l'axe du cône sont évidemment anti-parallèles. Cette définition serait peut-être même aussi bonne que l'autre.

On a donc l'énoncé général :

Les sections faites dans un cône du second degré par deux séries de plans anti-parallèles sont des courbes semblables. Si l'une des séries de sections se compose de sections circulaires, l'autre série se composera aussi de sections circulaires.

Note du Rédacteur. En général, deux courbes symétriques par rapport à un axe principal d'une surface du second degré sont semblables.

INTERSECTION DE COURBES ET DE SURFACES.

---

f_1, f_2, f_3 sont des fonctions des mêmes variables en nombre quelconque.

Posons

$$(a) \qquad f_1 + \lambda f_2 = 0,$$

$$(b) \qquad f_1 + \mu f_3 = 0,$$

$$(c) \qquad f_2 + \nu f_3 = 0;$$

multipliant la deuxième équation par ρ, ajoutant à la première et à la troisième, on obtient

$$(d) \qquad f_1(\rho + 1) + f_2(\lambda + 1) + f_3(\nu + \mu\rho) = 0.$$

Si l'on peut déterminer λ, μ, ν, ρ de telle sorte que l'équation (d) devienne *identiquement* nulle, les valeurs des variables qui satisfont simultanément aux équations (a) et (b), satisfont également l'équation (C). Cela s'applique aux intersections de courbes et de surfaces.

QUESTIONS.

604. Soient donnés un point ayant pour coordonnées $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, axes quelconques x, y, z, et trois plans

$$\frac{Ax}{u}+\frac{By}{u}+\frac{Cz}{u}+D=0,$$

$$\frac{A'x}{u}+\frac{B'y}{u}+\frac{C'z}{u}+D'=0,$$

$$\frac{A''x}{u}+\frac{B''y}{u}+\frac{C''z}{u}+D''=0,$$

δ et u sont des quantités quelconques. Menant par le point trois plans respectivement parallèles aux trois plans, on forme un parallélipipède dont on demande à trouver les arêtes en fonction de $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ et u.

605. Lorsqu'un triangle ABC est à la fois inscrit dans une courbe du troisième degré et circonscrit à cette même courbe, le produit des rayons de courbure aux points A, B, C est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. (MANNHEIM.)

606. En ordonnant le discriminant Δ de l'équation

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0,$$

suivant les puissances de e, posons

$$\Delta = Ae^3+3Be^2+3Ce+D.$$

démontrer qu'on a

$$\begin{aligned}&A^2D^2 - 6ABCD + 4AC^3 + 4B^3D - 3B^2C^2\\&= -729(a^2d + 2b^3 - 3abc)^2\\&\times(a^2d^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2)^3.\end{aligned}$$

(MICHAEL ROBERTS.)

607. Soit s_r la somme des puissances r des racines de l'équation

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0.$$

Posons

$$a^6 \times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{vmatrix} = Pf^2 + 2Qf + R,$$

alors P, Q, R ne renferment pas f. Si

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0,$$

démontrer qu'on a la relation suivante

$$Q^2 - PR = 0.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

608. Posons

$$\begin{aligned}K &= 4(ae - 4bd + 3c^2)(bf - 4ce + 3d^2)\\&\quad - (af - 3be + 2cd)^2,\\H &= b^2 - ac,\\I &= ae - 4bd + 3c^2,\\J &= ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dK}{df}\right)^2 = 4HI^3 - 12aIJ - a^2K.$$

(Michael Roberts.)

609. Soit le triangle RFF′; les sommets F et F′ sont fixes et le sommet R est variable, Ff, $F'f'$ deux hauteurs du triangle passant par le point H, point de rencontre des trois hauteurs; C point de rencontre des deux droites ff', FF′. Par les trois points R, H, C, on fait passer une circonférence; la tangente MT menée à cette circonférence par le point M milieu de FF′ a une grandeur constante pour toutes les positions de R. (Arthur Lescaze.)

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XX, p. 359);

Par M. E.-E. KUMMER (*)

Crelle, t. LVII.

Traduit par M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

---

§ VI. — *De la mesure de la densité.*

Considérons les quantités ξ, η, ζ qui satisfont à l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

(*) M. Chasles traitera cette année en Sorbonne les propriétés des lignes dans l'espace; ce qui attache un nouvel intérêt au Mémoire Kummer, que

comme les coordonnées rectangulaires d'un point d'une sphère dont le rayon est 1.

A tout rayon du système correspond un point sur la sphère, et à toute série continue de rayons correspond une courbe continue sur la sphère.

Par un point d'un rayon, menons un plan qui lui soit perpendiculaire et traçons une courbe dans ce plan. A la série des rayons qui passent par les différents points de cette courbe correspond une courbe sur la sphère. Imaginons que la première courbe s'écarte infiniment peu du pied du rayon auquel son plan est perpendiculaire et qu'elle détermine tout autour de ce pied une aire infiniment petite; la courbe correspondante sur la sphère sera fermée et son aire sera infiniment petite. Dans le cas particulier où les rayons des systèmes sont normaux à une même surface et où le plan perpendiculaire à un rayon en un point quelconque est remplacé par le plan tangent à la surface à l'origine du rayon, le rapport de ces deux aires infiniment petites a été pris par Gauss pour la mesure de la courbure de la surface. Dans le cas le plus général d'un système de rayons, ce rapport a aussi une très-grande importance; il ne donne plus la mesure de la courbure, mais bien la mesure de la *densité* du système. Nous définirons de la manière suivante la mesure de la densité d'un système de rayons : Si par un point d'un rayon, on mène un plan qui lui soit perpendiculaire, et

---

l'exiguïté de l'espace nous a forcé de morceler. Sa véritable place était dans le *Journal de M. Liouville;* mais le célèbre géomètre, ainsi que M. Poncelet, repoussent les *déterminants*. Rappelons-nous que Huyghens repoussait la hiérarchie infinitésimale leibnizienne; que Leibniz repoussait l'attraction newtonienne. Cela n'a pas empêché l'une et l'autre de prendre racine, de pousser de vigoureuses tiges, couronnées par la géométrie universelle, par la mécanique analytique, céleste, physique, moléculaire.

Il en sera de même de l'analyse algorithmique. (*Note du Rédacteur.*)

si sur ce plan on trace une courbe fermée qui s'écarte infiniment peu du rayon et dont l'aire soit f, si l'on désigne par φ l'aire de la courbe correspondante sur la sphère, $\frac{\varphi}{f}$ sera *la mesure de la densité du système en ce point.*

Soit dq la distance infiniment petite d'un point de la courbe f au pied du rayon auquel le plan de f est perpendiculaire. Ce point est déterminé par les quantités x, y, z, ξ, η, ζ et son abscisse R. Soient $\varkappa'$, λ', μ' les cosinus des angles que dq forme avec les trois axes, et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ les quantités qui déterminent le rayon passant par la seconde extrémité de q. D'après les équations (16), § Ier, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} \varkappa'\,dq = dx + \mathrm{R}\,d\xi - \xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \lambda'\,dq = dy + \mathrm{R}\,d\eta - \eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \mu'\,dq = dz + \mathrm{R}\,d\zeta - \zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz). \end{cases}$$

Soit α l'angle que forme dq avec une perpendiculaire au premier plan principal et par suite $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ l'angle que forme dq avec une perpendiculaire au second plan principal, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \varkappa_1\varkappa' + \lambda_1\lambda' + \mu_1\mu', \\ \sin\alpha = \varkappa_2\varkappa' + \lambda_2\lambda' + \mu_2\mu'. \end{cases}$$

Multiplions ces deux équations par dq et remplaçons $\varkappa' dq$, $\lambda' dq$, $\mu' dq$ par leurs valeurs (1) et remarquons que

$$\varkappa_1\xi + \lambda_1\eta + \mu_1\zeta = 0,$$

$$\varkappa_2\xi + \lambda_2\eta + \mu_2\zeta = 0,$$

nous obtenons ainsi

$$(3)\begin{cases} dq\cos\alpha = \varkappa_1\, dx + \lambda_1\, dy + \mu_1\, dz + \mathrm{R}\,(\varkappa_1\, d\xi + \lambda_1\, d\eta + \mu_1\, d\zeta), \\ dq\sin\alpha = \varkappa_2\, dx + \lambda_2\, dy + \mu_2\, dz + \mathrm{R}\,(\varkappa_2\, d\xi + \lambda_2\, d\eta + \mu_2\, d\zeta). \end{cases}$$

Remplaçons dans ces formules $\varkappa_1$, λ_1, μ_1, $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 par leurs valeurs (5) et (6) (§ III) et dx, dy, dz, $\xi\, d\eta$, $d\zeta$ par leurs valeurs en fonction des quotients différentiels partiels et des différentielles du et dv, nous obtiendrons

$$(4)\qquad \begin{cases} dq\cos\alpha = -\mathfrak{A}_2\, du - \mathfrak{B}_2\, dv, \\ dq\sin\alpha = +\mathfrak{A}_1\, du + \mathfrak{B}_1\, dv, \end{cases}$$

où nous posons, pour abréger,

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}' t_1 + \mathrm{R}\,(\mathcal{E} + \mathcal{F} t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}' t_2 + \mathrm{R}\,(\mathcal{E} + \mathcal{F} t_2)}{\mathrm{V}_2},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g} t_1 + \mathrm{R}\,(\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g} t_2 + \mathrm{R}\,(\mathcal{F} + \mathcal{G} t_2)}{\mathrm{V}_2}.$$

De ces deux équations, il résulte que

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 t}{\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 t},$$

et, par suite,

$$(6)\qquad t = -\frac{\mathfrak{A}_1\cos\alpha + \mathfrak{A}_2\sin\alpha}{\mathfrak{B}_1\cos\alpha + \mathfrak{B}_2\sin\alpha}.$$

Soit $d\sigma$ l'élément de courbe sur la sphère correspondant à dq, les coordonnées des extrémités de cet arc sont ξ, η, ζ, $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$. On a donc

$$(7)\qquad d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2} = du\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2};$$

les cosinus des angles que forme $d\sigma$ sur la sphère avec les

trois axes des coordonnées ou $\frac{d\xi}{d\sigma}, \frac{d\eta}{d\sigma}, \frac{d\zeta}{d\sigma}$, sont donc

$$(8)\quad \frac{a + a' t}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}}, \quad \frac{b + b' t}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}}, \quad \frac{c + c' t}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}}.$$

Si t_0 représente la valeur de t qui correspond à $\alpha = 0$, on a, d'après l'équation (6),

$$(9)\qquad t_0 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1},$$

et si l'on désigne par α' l'angle correspondant à α sur la sphère, on a

$$(10)\quad \cos\alpha' = \frac{(a + a' t_0)(a + a' t) + (b + b' t_0)(b + b' t) + (c + c' t_0)(c + c' t)}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t_0 + \mathcal{G} t_0^2}\,\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}},$$

ou, en simplifiant,

$$(11)\qquad \cos\alpha' = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F} t_0 + (\mathcal{F} + \mathcal{G} t_0) t}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t_0 + \mathcal{G} t_0^2}\,\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}},$$

d'où l'on déduit pour $\tan\alpha'$ la valeur suivante

$$(12)\qquad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\Delta(t - t_0)}{\mathcal{E} + \mathcal{F} t_0 + (\mathcal{F} + \mathcal{G} t_0) t}.$$

En différentiant cette équation, il vient

$$(13)\qquad d\alpha' \frac{\Delta dt}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2},$$

et, par suite, d'après l'équation (7),

$$(14)\qquad d\sigma^2 d\alpha = \Delta du^2 dt.$$

Par la différentiation de l'équation (6), on a

$$(15)\qquad dt = \frac{(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1) d\alpha}{(\mathfrak{B}_1 \cos\alpha + \mathfrak{B}_2 \sin\alpha)^2},$$

et de la première des équations (4), en y remplaçant $\frac{du}{dv} = t$ par sa valeur en α, équation (6), on tire

$$(16)\qquad dq = \frac{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2)\,du}{\mathfrak{B}_1\cos\alpha + \mathfrak{B}_2\sin\alpha};$$

donc

$$(17)\qquad dq^2\,d\alpha = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1)\,du^2\,dt.$$

Cette équation et l'équation (14) donnent

$$(18)\qquad d\sigma\,d\alpha' = \frac{\Delta}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1}\cdot dq^2.d\alpha.$$

Puisque dq est le rayon vecteur et α l'angle correspondant pour la courbe infiniment petite f et que $d\sigma$ est le rayon vecteur et α' l'angle correspondant pour la courbe infiniment petite φ, on a

$$(19)\qquad f = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dq^2 d\alpha,\quad \varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma^2\,d\alpha'.$$

L'intégration de l'équation (18) entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$ qui correspondent aux mêmes limites de α', donne donc

$$(20)\qquad \varphi = -\frac{\Delta}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1}\cdot f.$$

Si l'on désigne par Θ la mesure de la densité, on a

$$(21)\qquad \Theta = \frac{\varphi}{f} = \frac{\Delta}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2}.$$

Des relations (4) on tire

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$$
$$= \frac{t_2 - t_1}{V_1 V_2}\left\{ eg - ff' + [g\mathfrak{E} - (f+f')\mathfrak{F} + e\mathfrak{G}]R + \Delta^2 R^2 \right\}.$$

D'après les valeurs de ρ_1 et ρ_2, équation (10) (§ IV), on a

$$\text{eg} - \text{ff}' = \rho_1 \rho_2 \Delta,$$

$$\text{g}\mathfrak{E} - (\text{f} + \text{f}')\mathfrak{F} + \text{e}\mathfrak{G} = -(\rho_1 + \rho_2)\Delta^2,$$

et puisque, d'après l'équation (4) (§ III),

$$V_1 V_2 = \Delta(t_2 - t_1),$$

on a

$$(22) \qquad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 = \Delta[\rho_1 \rho_2 - (\rho_1 + \rho_2)R + R^2];$$

donc

$$(23) \qquad \Theta = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 - (\rho_1 + \rho_2)R + R^2}$$

ou

$$(24) \qquad \Theta = \frac{1}{(\rho_1 - R)(\rho_2 - R)}.$$

Ainsi :

La mesure de la densité en chaque point d'un rayon est égale à la réciproque du produit des distances de ce point aux foyers du rayon.

Cette mesure est toujours réelle, même quand les foyers sont imaginaires. Pour des systèmes de rayons à surfaces focales réelles, cette mesure est positive pour tous les points situés en dehors des surfaces focales, négative pour les points situés entre ces deux surfaces, et sa valeur négative maximum correspond au centre de chaque rayon ; pour les foyers, elle est infinie. Dans les systèmes à surfaces focales imaginaires, cette mesure est toujours positive et est maxima pour le centre.

Si, avec un rayon donné, on prend tous les rayons infiniment voisins passant dans l'intérieur de la courbe infiniment petite f tracée dans un plan perpendiculaire au

rayon donné, on aura un *pinceau* infiniment petit de rayons, terminé par la surface réglée formée par tous les rayons qui s'appuient sur f. L'aire infiniment petite f est la section de ce pinceau infiniment petit. C'est donc la section qui correspond à l'abscisse R. Si l'on considère une section perpendiculaire f' dont l'abscisse soit R', la courbe qui lui correspond sur la sphère est la courbe φ qui correspond à f; car tous les rayons qui s'appuient sur le contour f s'appuient aussi sur le contour f'. Si l'on désigne la mesure de la densité au point dont l'abscisse est R' par Θ', on a

$$\frac{\varphi}{f} = \Theta', \quad \frac{\varphi}{f} = \Theta,$$

d'où

$$\frac{f}{f'} = \frac{\Theta}{\Theta'}. \tag{25}$$

Donc :

Les aires des deux sections d'un pinceau infiniment petit sont inversement proportionnelles aux mesures des densités aux points où passent ces sections.

Si, au lieu de considérer les mesures de la densité, on considère les densités mêmes des rayons d'un pinceau infiniment petit en ses différentes sections, il est clair que ces densités sont dans le rapport inverse des aires des sections du pinceau. En effet, tous les rayons d'un pinceau se distribuent dans toutes les sections de manière à en couvrir toute l'aire, et dans chaque section ils sont d'autant plus rapprochés que ces aires sont plus petites. Donc :

Les densités dans les différentes sections d'un pinceau donné sont proportionnelles aux mesures des densités correspondantes.

Ceci justifie suffisamment la dénomination de *mesure de la densité.*

Pour deux points situés sur des rayons différents ou appartenant à deux pinceaux infiniment petits, le rapport des densités n'est pas nécessairement le même que celui des mesures de la densité. Ceci devient évident quand on considère le système particulier où tous les rayons passent par un même point. Ce système peut être tel, que les rayons s'épanouissent dans tous les sens d'une manière identique ou avec la même densité, ou bien il peut être tel, que le rapprochement des rayons varie avec la direction des rayons. Dans le premier cas, la densité est la même pour tous les points également éloignés du point de départ des rayons et par suite elle est toujours proportionnelle à la mesure de la densité. Dans le second cas, la densité est fonction de la distance au point de départ, mais elle est aussi fonction de la direction. En général, imaginons, comme nous l'avons déjà fait, qu'un système de rayons soit déterminé comme il suit. De chacun des points d'une surface donnée part un rayon dans une direction déterminée. Nous pourrons considérer la densité des différents points du système situés sur cette surface donnée comme une fonction de x, y, z ou, ce qui revient au même, comme une fonction des variables indépendantes u et v. Par suite, la densité en un point donné d'un système sera déterminée par rapport à la densité d'un point situé sur le rayon passant par le point donné. La densité en un point quelconque est égale à la mesure de la densité en ce point multipliée par une fonction de u et de v qui ne renferme pas R et qui, par suite, est la même pour tous les points appartenant à un même rayon. Lorsque cette fonction est constante et que, en conséquence de cela, la densité en tous les points du sys-

tème est proportionnelle à la mesure de la densité, on pourra dire que le système est *homogène*.

Tous les points des différents rayons d'un système où la mesure de la densité est la même, sont situés sur une surface que l'on peut nommer *surface d'égale mesure de densité*. Comme l'on peut donner à la mesure de la densité toutes les valeurs constantes que l'on veut, il s'ensuit que dans chaque système de rayons il y a une série de surfaces d'égale mesure de densité. Toutes ces surfaces se représentent bien simplement au moyen de l'équation (23)

$$R^2 - (\rho_1 + \rho_2)R + \rho_1\rho_2 = \frac{1}{\Theta}.$$

Supposons Θ constant et résolvons cette équation par rapport à R, nous aurons

$$(26) \qquad R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{2} + \frac{1}{\Theta}}.$$

Pour chacune de ces valeurs de R,

$$(27) \qquad x' = x + R\xi, \quad y' = y + R\eta, \quad z' = z + R\zeta$$

sont les coordonnées de tous les points du système pour lesquels la mesure de la densité a la valeur constante Θ.

Ces équations (27) sont les équations des surfaces d'égale mesure de densité, en ce sens qu'elles déterminent les coordonnées des points de cette surface en fonction des deux variables indépendantes u et v. Pour que ces surfaces soient réelles, il faut que la valeur de $\frac{1}{\Theta}$ soit comprise entre les limites $-\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{4}$ et $+\infty$. Pour

$\theta = \infty$, R n'est réel que si les foyers le sont, et on a

$$R = \rho_1 \quad \text{ou} \quad R = \rho_2,$$

de sorte que les surfaces focales sont des surfaces d'égale mesure de densité. Cette mesure est infiniment grande pour tous les points de ces surfaces.

Si les deux surfaces focales sont réelles et données, en sorte que tous les rayons du système puissent être considérés comme des tangentes communes à ces surfaces, on peut construire facilement les surfaces d'égale mesure de densité. Il suffit pour cela de déterminer sur chaque rayon un point tel, que le produit de ses distances aux foyers du rayon (ou points de contact du rayon avec les surfaces focales) soit égal à une constante donnée. Si cette constante est positive, le point se trouve en dehors des deux foyers; il se trouve entre les deux foyers dans le cas contraire.

(*La fin prochainement.*)

THÉORIE DES POINTS MULTIPLES ET DES TANGENTES;

D'APRÈS SALMON.

---

1. Soit

$$A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \ldots = 0$$

l'équation en coordonnées cartésiennes d'une courbe.

Si l'on a $A = 0$, la tangente à l'origine est alors

$$Bx + Cy = 0,$$

ou en coordonnées polaires

$$\rho\,(B\cos\theta + C\sin\theta) = 0.$$

Si l'on a encore $B = o$, l'axe des x est une tangente, et si $C = o$, l'axe des y est une tangente.

2. Si $A = B = C = o$, toute droite qui passe par l'origine rencontre la courbe en deux points qui *coïncident;* l'origine est alors un point double, et sous ce point de vue toutes ces lignes sont en quelque sorte des tangentes; mais parmi ces lignes il y en a deux qui touchent plus étroitement les courbes que toutes les autres : ce sont celles qui sont déterminées par l'équation polaire

$$\rho^2 (D \cos^2 \theta + E \sin \theta \cos \theta + F \sin^2 \theta) = o;$$

alors l'équation polaire devient divisible pour ρ^2; trois valeurs de ρ deviennent nulles : ce sont ces deux lignes qui portent exclusivement le nom de *tangentes*. Le système de ces deux lignes est représenté par l'équation

$$Dx^2 + Gxy + Fy^2 = o.$$

3. Si l'équation polaire de la courbe est

$$u_2 + u_3 + \ldots = o,$$

u_p, c'est ρ^p multipliée par une fonction trigonométrique de θ, $u_2 = o$ est l'équation du système des doubles tangentes.

Il y a trois cas à distinguer :

1° Les deux tangentes sont *réelles*. Alors l'origine est un point d'intersection de deux branches de la courbe, chaque branche ayant sa tangente particulière. On en a un exemple simple dans les courbes formées du système de deux autres courbes; soient

$$P = o, \quad Q = o$$

deux courbes de degrés p et q et $p + q = n$; alors

$$U = PQ = o$$

est une courbe de degré n; les courbes P et Q se coupent en pq points, et en chacun de ces points il y a évidemment deux tangentes, l'une à la courbe P et l'autre à la courbe Q.

2° u_2 est un carré parfait; les deux tangentes réelles coïncident en une seule droite double. Le point porte alors le nom de *point de rebroussement*, et quelquefois, d'aprè une considération cinématique, *point stationnaire*. Si la courbe est décrite par un point, lorsque, ayant parcouru une des branches, il arrive au point de contact de la tangente double, il semble s'arrêter pour changer subitement le *sens* du mouvement dans le sens opposé. La tangente double touche en *trois points* consécutifs.

L'exemple rapporté ci-dessus ne peut pas servir ici; supposons que les deux courbes

$$P = o, \quad Q = o$$

se touchent; alors il y a en ce point une seule tangente, mais elle rencontre la courbe de ce degré n en *quatre points* consécutifs, deux sur la courbe P et deux sur la courbe Q. Ainsi quoiqu'il y ait une tangente double, ce n'est pas là un point de rebroussement; l'équation polaire a alors la forme

$$u_1^2 + u_1 v_2 + u_4 + \ldots = o,$$

$u_1 = o$ réduit l'équation à

$$u_4 + \ldots = o.$$

3° Les deux tangentes sont *imaginaires*, alors il n'existe aucun point consécutif à l'origine qui est ainsi un point *isolé*, mais *conjugué* à la courbe; toutes les droites qui passent par ce point sont des espèces de tangentes qui coupent la courbe en $n - 2$ points, si n est le degré de la courbe.

4. *Exemple.* — Soit la cubique donnée par l'équation

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c); \quad c > b > a;$$

la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x. Soient A, B, C les trois points de l'axe des x correspondants à

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c,$$

la courbe est formée d'un ovale passant par A et B et d'une branche de forme parabolique, ayant pour sommet C; entre B et C il n'existe aucun point.

Si $b = c$, le point B coïncide avec C; l'ovale et la branche forment une seule ligne, et en C il existe deux tangentes réelles.

Si $a = b$, alors A et B coïncident; l'ovale se réduit en un point *conjugué*, et les droites qui passent par ce point ne peuvent rencontrer la branche infinie qu'en un seul point.

Si $a = b = c$, les trois points A, B, C coïncident; il n'y existe qu'une seule tangente simultanément aux deux branches infinies. A est un point de rebroussement.

5. Si $a = b = c = 0$, l'origine devient un point *triple*, chaque droite qui y passe rencontre là la courbe en trois points consécutifs, et ne peut plus la couper qu'en $n - 3$ points, il y existe *trois tangentes* données par l'équation

$$u_3 = 0,$$

ce qui donne lieu à quatre espèces de points triples :

1° Les trois tangentes réelles et distinctes;

2° Une réelle et deux coïncidentes;

3° Les trois coïncidentes;

4° Une réelle et deux imaginaires.

Ce dernier cas est remarquable, car, à l'œil, ce point triple ne se distingue en rien des autres points de la

courbe; il n'y a, pour ainsi dire, que l'œil analytique qui aperçoit une différence.

6. Si l'équation polaire est de la forme

$$u_k + u_{k+1} + \ldots = 0,$$

on suppose que tous les termes qui précèdent u_k sont nuls; alors l'origine est un point de multiplicité k; il y a là k points coïncidents, et les trois qui y passent ne peuvent rencontrer la courbe qu'en $n - k$ points; il y existe k tangentes, ayant $k + 1$ points en commun avec la courbe, et ne pouvant rencontrer la courbe qu'en $n - k - 1$ points.

SUR UNE IDENTITÉ DE WARING;

Par M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

1. A la page 583 du tome IV des *Nouvelles Annales*, on trouve ce qui suit :

« Soient n quantités quelconques, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a toujours cette identité :

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) + \ldots \\ & \quad + (a_1 + \ldots + a_{n-1}) a_n (a_1 + \ldots + a_n) \\ & = a_n a_{n-1} (a_n + a_{n-1}) + (a_n + a_{n-1}) a_{n-2} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \ldots \\ & \quad + (a_n + \ldots + a_2) a_1 (a_n + \ldots + a_2). \end{aligned}$$

» Waring déduit cette identité d'une propriété de la » parabole; il serait intéressant de l'établir analytique» ment. »

2. Il suffit de démontrer que le premier membre de

l'identité proposée est une fonction symétrique des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$; car le second membre se déduit du premier en remplaçant chacune des quantités de la première des deux lignes ci-dessous,

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_i, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,$$
$$a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_{n-1+i}, \ldots,\ a_2,\ a_1,$$

par la quantité de même rang dans la deuxième ligne.

3. Soit P_n le premier membre de l'identité proposée; n est un entier absolu au moins égal à 2, et l'on a par définition

$$P_n = \sum_{n=1}^{n=n-1} [(a_1 + \ldots + a_n) a_{n+1} (a_1 + \ldots + a_{n+1})],$$

d'où

$$(A) \quad P_{n+1} = P_n + (a_1 + \ldots + a_n) a_{n+1} (a_1 + \ldots + a_{n+1}).$$

4. Développons quelques valeurs particulières de P_n.

$$P_2 = a_1 a_2 (a_1 + a_2),$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) \\ &= [(a_1 + a_2 + a_3) a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3] + [(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 a_3 + a_2 a_3)] \\ &= [a_1 + a_2 + a_3 (a_1 a_2) + a_1 a_3 + a_2 a_3] - a_1 a_2 a_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= P_3 + (a_1 + a_2 + a_3) a_4 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &= \left\{ \begin{aligned} &+ [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) \\ &\qquad\qquad - a_4 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) - a_1 a_2 a_3] \\ &+ [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_4 a_1 + a_4 a_2 + a_4 a_3)] \end{aligned} \right. \\ &= \left\{ \begin{aligned} &+ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_4 a_1 + a_4 a_2 + a_4 a_3) \\ &- (a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

5. Désignons par ${}_pS_q$ la somme des produits différents

de q facteurs qu'on peut former avec les p quantités distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_p$; ${}_pS_q$ sera une fonction symétrique de ces quantités, et les formules du n° 4 deviennent

$$P_2 = {}_2S_1 \times {}_2S_2,$$

$$P_3 = {}_3S_1 \times {}_3S_2 - {}_3S_3,$$

$$P_4 = {}_4S_1 \times {}_4S_2 - {}_4S_3,$$

d'où par induction :

(B) $$P_n = {}_nS_1 + {}_nS_2 - {}_nS_3,$$

formule qu'il faut vérifier.

6. Supposons cette formule exacte pour une valeur particulière ν de n, on aura

$$P_\nu = {}_\nu S_1 \times {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3,$$

et en vertu de la formule (A)

$$P_{\nu+1} = P_\nu + (a_1 + \ldots + a_\nu)\, a_{\nu+1}\, (a_1 + \ldots + a_{\nu+1}),$$

ou

$$P_{\nu+1} = {}_\nu S_1 \times {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3 + (a_1 + \ldots a_\nu)\, a_{\nu+1}\, (a_1 + \ldots + a_{\nu+1}),$$

$$P_{\nu+1} = ({}_{\nu+1}S_1 - a_{\nu+1})\, {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3 + {}_{\nu+1}S_1 \times a_{\nu+1} \times (a + \ldots + a_\nu),$$

$$P_{\nu+1} = {}_{\nu+1}S_1 \left({}_\nu S_2 + a_{\nu+1}(a_1 + \ldots + a_\nu)\right) - \left({}_\nu S_3 + a_{\nu+1}\, {}_\nu S_2\right);$$

mais

$${}_\nu S_2 + a_{\nu+1}(a_1 + \ldots + a_\nu) = {}_{\nu+1}S_2,$$

$${}_\nu S_3 + a_{\nu+1}\, {}_\nu S_2 = {}_{\nu+1}S_3$$

donc

$$P_{\nu+1} = {}_{\nu+1}S_1 \times {}_{\nu+1}S_2 - {}_{\nu+1}S_3.$$

7. Si donc la formule (B) est vraie pour une valeur particulière de n, elle est vraie pour la valeur de n immédiatement supérieure à celle-là ; or, en vertu du n° 5, elle est vraie pour $n = 2.3.4$; donc elle est générale ; la fonction P_n, mise sous cette forme, est évidemment une fonc-

tion symétrique des quantités $a_1, \ldots, a_n$, ce qui démontre l'identité proposée.

ARITHMOLOGIE.

Sur le caractère biquadratique du nombre 2;

PAR M. DIRICHLET.

Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$: on sait que l'on a

$$p = a^2 + b^2.$$

Posons

$$b - af = \dot{p},$$

où $\dot{p}$ désigne un multiple de p et f un nombre qui satisfait à la congruence. On a le caractère biquadratique suivant de 2

$$2^{\frac{1}{4}(p-1)} - f^{\frac{1}{2}ab} = \dot{p}.$$

Cet extrait d'une lettre posthume de Dirichlet à M. Stern, de Gottingue, traduit par M. Hoüel, savant professeur de la faculté de Bordeaux, paraîtra incessamment dans le *Journal de M. Liouville.*

QUESTIONS.

---

610. Soit donnée une surface du deuxième degré, la sphère exceptée, et un point fixe, lieu d'un spectateur; sous quel angle verra-t-il la surface? On sait que cet angle est mesuré par l'angle solide du cône tangent.

On admettra *provisoirement* des cas particuliers.

611. Trouver n nombres entiers et positifs, dont la somme égale le produit.

THÉORIE DU MOUVEMENT RELATIF;

PAR M. BRESHMANN,
Professseur à l'Université de Moscou.

Soient $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trois axes fixes, Ox, Oy, Oz trois axes mobiles autour d'une même origine O; on a pour un point M dont les coordonnées sont ξ, η, ζ

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ \zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{cases}$$

Lorsque la position des axes varie sans qu'ils cessent d'être perpendiculaires entre eux, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} d\xi = a_1\,dx + b_1\,dy + c_1\,dz + x\,da_1 + y\,db_1 + z\,dc_1, \\ d\eta = a_2\,dx + b_2\,dy + c_2\,dz + x\,da_2 + y\,db_2 + z\,dc_2, \\ d\zeta = a_3\,dx + b_3\,dy + c_3\,dz + x\,da_3 + y\,db_3 + z\,dc_3; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} d^2\xi = a_1 d^2x + b_1 d^2y + c_1 d^2z \\ \qquad + 2\,(da_1\,dx + db_1\,dy + dc_1\,dz) \\ \qquad + dx\,d^2a_1 + dy\,d^2b_1 + dz\,d^2c_1, \\ d^2\eta = a_2 d^2x + b_2 d^2y + c_2 d^2z \\ \qquad + 2\,(da_2\,dx + db_2\,dy + dc_2\,dz) \\ \qquad + dx\,d^2a_2 + dy\,d^2b_2 + dz\,d^2c_2, \\ d^2\zeta = a_3 d^2x + b_3 d^2y + c_3 d^2z \\ \qquad + 2\,(da_3\,dx + db_3\,dy + dc_3\,dz) \\ \qquad + dx\,d^2a_3 + dy\,d^2b_3 + dz\,d^2c_3. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma a\,db + \Sigma b\,da = 0, \\ \Sigma c\,da + \Sigma a\,dc = 0, \\ \Sigma b\,dc + \Sigma c\,db = 0, \end{cases}$$

où Σ désigne une somme de trois termes qui ont respectivement les indices 1, 2, 3, par exemple

$$\Sigma adb = a_1\,db_1 + a_2\,db_2 + a_3\,db_3.$$

Mettons en ordre cyclique

$$(5)\qquad \begin{cases} \Sigma adb = -\,d\varphi_3 = -\,\Sigma bda, \\ \Sigma cda = -\,d\varphi_2 = -\,\Sigma adc, \\ \Sigma bdc = -\,d\varphi_1 = -\,\Sigma cdb, \end{cases}$$

nous aurons

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma ad^2 b = -\,d^2\varphi_3 - \Sigma dadb, \\ \Sigma ad^2 c = -\,d^2\varphi_2 - \Sigma dadc, \\ \Sigma ad^2 a = -\,\Sigma (da)^2. \end{cases}$$

La dernière de ces équations est la seconde différentielle de l'équation $\Sigma a^2 = 1$. Il nous suffira de trouver la valeur de $d^2\xi$ pour écrire celles de $d^2\eta$, $d^2\zeta$. Supposons qu'à la fin du temps t les axes mobiles coïncident avec les axes fixes et remarquons que a, b, c désignent respectivement les cosinus des angles formés par les axes x, y, z avec les axes indiqués par les indices 1, 2, 3, qui signifient ξ, η, ζ, on aura

$$a_1 = 1,\quad b_2 = 1,\quad c_3 = 1,\qquad da = 0,\quad db_2 = 0,\quad dc_3 = 0;$$

mais $d^2 a$, $d^2 b_2$, $d^2 c_3$ ne sont pas $= 0$, tous les autres cosinus a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2 disparaissent; donc les équations (5) et (6) deviendront

$$(7)\qquad \begin{cases} db_1 = -\,d\varphi_3 = -\,da_2, \\ da_3 = -\,d\varphi_2 = -\,dc_1, \\ dc_2 = -\,d\varphi_1 = -\,db_3, \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} d^2 b_1 = -\,d^2\varphi_3 - da_3\,db_3 = -\,d^2\varphi_3 + d\varphi_1\,d\varphi_2, \\ d^2 c_1 = a^2\varphi_2 - da_2\,dc_2 = d^2\varphi_2 + d\varphi_3\,d\varphi_1, \\ d^2 a_1 = -\,(da_2)^2 - (da_3)^2 = -\,(d\varphi_2)^2 - (d\varphi_3)^2. \end{cases}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la première des équations (3) et qu'on mette pour abréger

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3,$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2,$$

on obtient

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(\omega_2 \frac{dz}{dt} - \omega_3 \frac{dy}{dt}\right) + z\frac{d\omega_2}{dt} - y\frac{d\omega_3}{dt}$$
$$+ \omega_1(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega_1^2 x.$$

La loi de composition du second membre de cette équation donne immédiatement le moyen d'écrire les valeurs de $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$. Lorsque l'origine a aussi un mouvement d'entraînement et qu'on désigne ses coordonnées par α, β, γ relativement à trois axes fixes parallèles à ceux de ξ, η, ζ, on a

$$x_1 = \xi + \alpha, \quad y_1 = \eta + \beta, \quad z = \zeta + \gamma,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d^2\beta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

donc

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = X = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(\omega_2\frac{dz}{dt} - \omega_3\frac{dy}{dt}\right)$$
$$+ z\frac{d\omega_2}{dt} - y\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega^2 x;$$

$$Y = \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(\omega_3 \frac{dx}{dt} - \omega_1 \frac{dz}{dt}\right) + x\frac{d\omega_3}{dt} - z\frac{d\omega_1}{dt}$$
$$+ \omega_2(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega^2 y,$$

$$Z = \frac{d^2\gamma}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} + 2\left(\omega_1 \frac{dy}{dt} - \omega_2 \frac{dx}{dt}\right) + y\frac{d\omega_1}{dt} - x\frac{d\omega_2}{dt}$$
$$+ \omega_3(\omega_1 x - \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega^2 z.$$

Pour faire usage de ces formules, il faut savoir ce que signifient ω_1, ω_2, ω_3 dont les valeurs sont données par les équations (7). En effet

$$db_1 = d\cos(y, \xi) = -d\varphi_3 = -d\cos(x, \eta)$$

ou

$$-\sin(y, \xi)\, d(y, \xi) = -d\varphi_3 = \sin(x, \eta)\, d(x, \eta),$$

et supposant qu'à la fin du temps t les axes x, y, z coïncident avec les ξ, η, ζ, on aura

$$\sin(y, \xi) = 1, \quad \sin(x, \zeta) = 1,$$

donc

$$d\varphi_3 = d(y, \xi)$$

ou

$$d\varphi_3 = -d(x, \zeta),$$

c'est-à-dire que $d\varphi_3$ est l'accroissement positif que reçoit pendant dt l'angle droit (y, ξ) à la fin du temps t ou la diminution de l'angle (x, ζ). Nous regarderons l'accroissement d'un angle comme positif ou négatif selon qu'il sera décrit autour de l'axe de gauche à droite ou inversement pour un œil qui se trouve sur l'axe positif, mais le signe donné à l'angle déterminera la direction de l'axe positif. On déduit de même des équations (7) que $d\varphi_1$, $d\varphi_2$ sont des angles infiniment petits décrits autour

des axes ξ et η; donc

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt},$$

sont les vitesses angulaires autour des axes ξ, η, ζ. Remarquons que les déplacements du point M relativement aux axes fixes, seulement en vertu du mouvement des axes x, y, z autour de l'origine, sont, d'après les équations (1) et (7),

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} d_e\xi = xda_1 + ydb_1 + zdc_1 = \zeta d\varphi_2 - \eta d\varphi_3, \\ d_e\eta = xda_2 + ydb_2 + zdc_2 = \xi d\varphi_3 - \zeta d\varphi_1, \\ d_e\zeta = xda_3 + ydb_3 + zdc_3 = \eta d\varphi_1 - \xi d\varphi_2. \end{cases}$$

Tels sont aussi les déplacements possibles d'un point quelconque d'un système invariable, qui peut se mouvoir autour d'une origine fixe. Le lieu des points qui restent immobiles pendant le mouvement des axes est une droite déterminée par les équations

$$d_e\xi = 0, \quad d_e\eta = 0, \quad d_e\zeta = 0,$$

c'est-à-dire

$$(l) \quad \begin{cases} \zeta d\varphi_2 - \eta d\varphi_3 = 0, \\ \xi d\varphi_3 - \zeta d\varphi_1 = 0, \\ \eta d\varphi_1 - \xi d\varphi_2 = 0, \end{cases}$$

ou, en divisant par dt,

$$(l) \quad \begin{cases} \zeta\omega_2 - \eta\omega_3 = 0, \\ \xi\omega_3 - \zeta\omega_1 = 0, \\ \eta\omega_1 - \xi\omega_2 = 0. \end{cases}$$

On tire de là

$$\frac{d\varphi_1}{\xi} = \frac{d\varphi_2}{\eta} = \frac{d\varphi_3}{\zeta} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

ou

$$\frac{\omega_1}{\xi} = \frac{\omega_2}{\eta} = \frac{\omega_3}{\zeta} = \frac{\omega}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}},$$

où

$$d\varphi = \sqrt{d\varphi_1^2 + d\varphi_2^2 + d\varphi_3^2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}.$$

Ces équations donnent

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \cos(l, \xi) = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{\omega_1}{\omega},$$

$$\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \cos(l, \eta) = \frac{d\varphi_2}{d\varphi} = \frac{\omega_2}{\omega},$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \cos(l, \zeta) = \frac{d\varphi_3}{d\varphi} = \frac{\omega_3}{\omega}.$$

D'ailleurs les équations (I), respectivement multipliées par ξ, η, ζ ou par $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$, donnent

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} \xi d_e \xi + \eta d_e \eta + \zeta d_e \zeta = 0, \\ d\varphi_1 d_e \xi + d\varphi_2 d_e \eta + d\varphi_3 d_e \zeta = 0. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations montre que le déplacement $d_e \sigma$ dont les projections sont $d_e \xi$, $d_e \eta$, $d_e \zeta$ se fait sur une sphère décrite autour de l'origine, et la seconde, mise sous la forme

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi}\frac{d_e \xi}{d_e \sigma} + \frac{d\varphi_2}{d\varphi}\frac{d_e \eta}{d_e \sigma} + \frac{d\varphi_3}{d\varphi}\frac{d_e \zeta}{d_e \sigma} = \cos(l, d_e \sigma) = 0,$$

prouve que l'arc $d_e \sigma$ est perpendiculaire à la droite (l).

Soit $r = Mn$ le rayon de cet arc, $MO = R$, on tire des équations (I)

$$\begin{aligned} (d\xi)^2 + (d\eta)^2 + (d\zeta)^2 = d_e \sigma^2 &= d\varphi^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ &\quad - (\xi d\varphi_1 + \eta d\varphi_2 + \zeta d\varphi_3)^2 \\ &= R^2 d\varphi^2 - R^2 d\varphi^2 . \cos^2(l, R), \\ &= R^2 d\varphi^2 \sin^2(l, R) = r^2 d\varphi^2; \end{aligned}$$

donc

$$d\varphi = \frac{d_e\sigma}{r}$$

est l'arc décrit autour de l'axe instantané, et, d'après les équations trouvées ci-dessus,

$$d\varphi_1 = d\varphi \cos(l, \xi)$$

ou

$$\omega_1 = \omega \cos(l, \xi), \quad \omega_2 = \omega \cos(l, \eta), \quad \omega_3 = \omega \cos(l, \zeta),$$

c'est-à-dire qu'en connaissant la vitesse angulaire autour d'une droite (l), on trouve sa composante autour d'une autre droite ξ en multipliant ω par $\cos(l, \xi)$ (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 603

(voir t XX, p. 399);

PAR M. COLOT,
Professeur.

Si l'on désigne par $E(a, b)$ la circonférence d'une el lipse dont les axes sont $2a$, $2b$ et si l'on pose

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

on a

$$E(a, b) = E\left(\frac{a+c}{2a+b}a, \frac{a-c}{2a+b}a\right) + E\left(\frac{a+b}{2a+b}b, \frac{2\sqrt{ab}}{2a+b}b\right).$$

(PROUHET.)

(*) Ce Mémoire et celui de M. Quet sont, à ce que je sache, ce que nous avons de plus satisfaisant sur les mouvements relatifs, les seuls qui existent dans la nature. TM.

Nous représenterons par $E\left(\frac{c}{a}\right)$ la fonction elliptique complète de seconde espèce qui a pour module $\frac{c}{a}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi}.$$

Lemme I. — La circonférence d'une ellipse $E(a, b)$ est égale $2aE$ à $\left(\frac{c}{a}\right)$. (*Voir* tous les Traités de Calcul intégral.)

Lemme II. — Soient λ, λ_1, λ_2 trois quantités liées entre elles par les relations

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1}$$

et μ, μ_1, μ_2 trois autres quantités telles, que l'on ait

$$\mu^2 + \lambda^2 = 1, \quad \mu_1^2 + \lambda_1^2 = 1, \quad \mu_2^2 + \lambda_2^2 = 1;$$

on peut poser

$$\text{(A)} \quad \mu_1(1+\mu_1)E(\lambda) - (2+\mu_1)E(\lambda_1) + (1+\lambda_1)E(\lambda_2) = 0$$

(Verhulst, *Fonctions elliptiques*, p. 162).

Théorème. — *Les trois ellipses ont pour excentricités* $\frac{c}{a}$, $\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}$, $\frac{a-b}{a+b}$. *L'égalité à démontrer revient donc à la suivante*

$$\text{(B)} \quad E\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{a+c}{2a+b} E\left(\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{a+b}{2a+b} E\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

Posons

$$\text{(C)} \qquad \frac{a-b}{a+b} = \lambda, \quad \frac{c}{a} = \lambda_1, \quad \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} = \lambda_2.$$

on vérifiera sans peine que

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1},$$

et que la substitution dans l'égalité (B) des valeurs de a, b, c tirées des équations (C), la rendra identique à (A).

SOLUTION DE LA QUESTION 509

(voir t. XIX, p 45);

PAR M. COLOT,

Professeur.

Soient p et q deux nombres donnés, p_1 la moyenne arithmétique, q_1 la moyenne géométrique, p_2 la moyenne arithmétique de p_1 et q_1, q_2 leur moyenne géométrique, et ainsi de suite, de sorte que p_{n+1}, q_{n+1} sont les moyennes arithmétiques et géométriques de p_n, q_n. Quelle est la valeur de $p\infty$ et démontrer que $p\infty = q\infty$. (GAUSS.)

Il est facile de montrer que $p\infty = q\infty$. En effet on a, par définition des quantités q_1 et p_1,

$$p_1 = \frac{p+q}{2}, \quad q_1 = \sqrt{pq},$$

d'où

$$p_1 - q_1 = \frac{p+q-2\sqrt{pq}}{2} = \frac{p-2\sqrt{q}(\sqrt{p}-\sqrt{q})}{2} < \frac{p-q}{2};$$

on aurait de même

$$p_2 - q_2 < \frac{p_1-q_1}{2} < \frac{p-q}{4},$$

$$p_3 - q_3 < \frac{p_2-q_2}{2} < \frac{p-q}{8},$$

et, en général,

$$p_n - q_n < \frac{p-q}{2^n},$$

ce qui démontre que la différence $p_n - q_n$ a pour limite zéro.

Avant de chercher la valeur commune des deux quantités $p\infty$, $q\infty$, nous établirons quelques lemmes.

Lemmes. — Soient c, c_1, c_2,..., une suite de quantités plus petites que l'unité et croissantes, liées entre elles par les relations

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \ldots.$$

Soient

$$b = \sqrt{1-c^2}, \quad b_1 = \sqrt{1-c_1^2},$$

on aura

1°

$$(\alpha) \qquad b = \frac{2\sqrt{b_1}}{1+b_1}, \quad b_1 = \frac{2\sqrt{b_2}}{1+b_2}.$$

2°

$$(\beta) \qquad 1 + b_1 = \frac{2}{1+c}, \quad 1 + b_2 = \frac{2}{1+c_1}.$$

3°

$$(\gamma) \qquad D(c_n) = (1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1})D(c)$$

(Verhulst, *Fonctions elliptiques*, p. 148.)

4°

$$(\delta) \qquad D(b) = (1+b_n)(1+b_{n-1})\ldots(1+b_1)D(b_n).$$

5°

$$(\varepsilon) \qquad D(b) = \frac{2}{1+c_{n-1}} \cdot \frac{2}{1+c_{n-2}} \cdots \frac{2}{1+c} D(b_n).$$

6°

$$(\lambda) \qquad (1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1}) = \frac{2^n D(b_n)}{D(b)}.$$

[D (b) représente la fonction elliptique complète de première espèce $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\varphi}}$, et ainsi des autres.)

Les égalités (α) et (β) se vérifient sans difficulté.

(δ) ne diffère de (γ) qu'en ce que les modules c, c_1, $c_2, \ldots$, ont été remplacés par b_n, $b_{n-1}, \ldots$, qui ont entre eux les mêmes relations.

(ε) est une conséquence immédiate de (β) et de (δ).

Enfin en résolvant (γ) par rapport au produit $(1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1})$, on obtient la formule (λ).

Passons maintenant à la recherche de $p\infty$.

Posons

$$\frac{q}{p} = c, \quad \frac{q_1}{p_1} = c_1, \ \ldots, \quad \frac{q_n}{p_n} = c_n, \ldots.$$

Nous aurons

$$p_n = \frac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}, \quad q_n = \sqrt{p_{n-1}q_{n-1}},$$

$$\frac{q_n}{p_n} = \frac{2\sqrt{p_{n-1}q_{n-1}}}{p_{n-1}+q_{n-1}}$$

ou

$$c_n = \frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1+c_{n-1}};$$

par conséquent tout ce qui a été dit précédemment est applicable à la suite de rapports $\frac{q}{p}$, $\frac{q_1}{p_1}$, etc.

De plus on a

$$2p_1 = p + q = p(1+c),$$
$$2p_2 = p_1 + q_1 = p_1(1+c_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2p_n = p_{n-1} + q_{n-1} = p_{n-1}(1+c_{n-1}).$$

Multipliant membre à membre et supprimant les facteur communs,

$$2^n p_n = p(1+c)(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1}),$$

et comme $(1+c)\,(1+c_1)\ldots(1+c_{n-1}) = \dfrac{2^n \mathrm{D}(b_n)}{\mathrm{D}(b)}$,

$$p_n = p\cdot\frac{\mathrm{D}(b_n)}{\mathrm{D}(b)},$$

pour $n=\infty$, $c_n = 1$, $b_n = 0$,

$$\mathrm{D}(b_n) = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$p\infty = \frac{p\pi}{2\mathrm{D}(b)},$$

remplaçant b par sa valeur

$$\sqrt{1-c^2} = \sqrt{1-\frac{q^2}{p^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2-q^2},$$

nous aurons pour valeur définitive

$$p\infty = \frac{p\pi}{2\mathrm{D}\left(\frac{1}{p}\sqrt{p^2-q^2}\right)}.$$

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

(voir BULLETIN, t. V, p. 4);

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

$$\tang x \tang 2x + \cot x = 2.$$

Je pose

$$y = \tang x,$$

puis

$$y = \frac{z+1}{12},$$

et j'obtiens successivement

$$4y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0,$$
$$z^3 - 75z + 358 = 0;$$

il n'y a qu'une racine réelle : $z = -10,4523$.

$$y = -0,78769,$$
$$x = -38^\circ 13' 37'' \pm 180^\circ n.$$

$$2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = 2.$$

Je pose

$$y = \sin 3x,$$

et j'obtiens

$$2y^4 - 3y^2 + 1 = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin 3x = \pm 1, & x = \pm 30^\circ \pm 120^\circ n, \\ \sin 3x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 15^\circ \pm 120^\circ n, \\ x = \pm 45^\circ \pm 120^\circ n. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\cos nx + \cos (n-2) x = \cos x.$$

Je rends le premier membre logarithmique

$$2 \cos (x-1) x \cos x = \cos x;$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \cos x = 0, & x = \pm 360^\circ n, \\ \cos (n-1) x = \frac{1}{2}, & x = \frac{\pm 360^\circ n \pm 60^\circ}{n-1}. \end{array} \right.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 315);

Par M. FAURE.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$, n points matériels de mêmes masses; G_2 le centre de gravité de P_1, P_2; G_3 le centre de gravité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2; G_4 le centre de gravité de P_4 et G_3, et ainsi de suite, de sorte que G_n est le centre de gravité de P_n et de G_{n-1}. G_n est indépendant de la manière dont on prend les masses. Désignons par $A_{(i)}$ la distance de G_{i-1} à P_i; la quantité

$$\frac{1}{2}(A_2)^2 + \frac{2}{3}(A_3)^2 + \frac{3}{4}(A_4) + \ldots + \frac{n-1}{n}(A_n)^2$$

est constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses. (Steiner.)

Lemme. — Soient A, B, C trois points en ligne droite, G un point quelconque; on a la relation

$$GA^2.BC + CB^2.AC = AB.AC\ BC + GC^2.AB.$$

Si aux points A et B sont appliquées les masses respectives α, β, et que C soit leur centre de gravité, l'égalité précédente devient

$$\alpha . GA^2 + \beta . GB^2 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} AB^2 + (\alpha+\beta) GC^2.$$

Démonstration. — Ceci admis, au lieu de supposer, comme dans le théorème de M. Steiner, que les points P aient des masses égales, je suppose qu'ils ont des masses inégales respectivement représentées par p_1, $p_2, \ldots$, p_n. Soit alors

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = S_k,$$

et G un point pris arbitrairement; joignant ce point à tous les points P ainsi qu'aux points G_2, $G_3, \ldots$, G_n, les triangles $GP_1 P_2$, $GG_2 P_3, \ldots$, $GG_{n-1} P_n$ donnent

$$p_1 GP_1^2 + p_2 GP_2^2 = \frac{p_1 p_2}{s_2} P_1 P_2^2 + S_2 GG_2^2,$$

$$S_2 GG_2^2 + p_3 GP_3^2 = \frac{s_2 p_3}{s_3} G_2 P_3^2 + S_3 GG_3^2,$$

. . . .

$$S_{n-1} GG_{n-1} + p_n GP_n^2 = \frac{s_{n-1} p_n}{s_n} G_{n-1} P_n^2 + S_n GG_n^2.$$

Si l'on vient à supposer que le point G coïncide avec G_n, centre de gravité de notre système de points, le terme GG_n est nul, de sorte qu'en ajoutant les égalités précédentes, on trouve

$$\frac{p_1 p_2}{s_2} P_1 P_2^2 + \frac{s_2 p_3}{s_3} G_2 P_3^2 + \ldots + \frac{s_{n-1} p_n}{s_n} G_{n-1} P_n$$
$$= p_1 G_n P_1^2 + p_2 G_n P_2^2 + \ldots + p_n G_n P_n^2.$$

Le second membre est constant, le premier le sera aussi.

Si les masses sont égales, on a le résultat de M. Steiner. Ce théorème donne des corollaires intéressants que l'équation indique d'elle-même.

SOLUTION DE LA QUESTION 295

(voir t. XIII, p. 315);

PAR M. FAURE.

Par un point P pris dans le plan d'une courbe algébrique M, on mène des normales à cette courbe qui la rencontrent aux points A_1, A_2,..., A_n. On suppose que la somme des carrés de ces normales est égale à p^2, quantité constante. Le point P engendre une courbe M_1; la normale à cette courbe menée par le point P passe par le centre des moyennes distances des points A_1, A_2, etc.

Cherchons un point Q tel, que

$$QA_1^2 + QA_2^2 + \ldots + QA_n^2 = p^2,$$

le lieu du point Q est une courbe M_2 touchant la courbe M_1 au point P. Il en sera de même pour une relation quelconque entre les normales.

Démonstration. — Des points A_1, A_2,..., A_n comme centre avec des rayons quelconques je décris des cercles, le lieu du point dont la somme des carrés des distances aux centres de ces cercles est constante sera, comme l'on sait, un cercle M_2 qui a pour centre le centre des moyennes distances des points A_1, A_2,..., A_n. Soit P' un point infiniment voisin du point P sur la courbe M, les normales menées de ce point à la courbe M seront aussi normales à chacun de nos cercles et passeront ainsi par leur centre. Donc le point P' est sur la courbe M_2. La droite PP' étant tangente aux deux courbes M_1 et M_2, la normale en P à la première passera par le centre des moyennes distances des points A_1, A_2,..., A_n. Dans le cas où la courbe M_2 ne serait pas un cercle, c'est-à-dire si

l'on établissait toute autre relation entre les normales, cette courbe n'en serait pas moins tangente à la courbe M_1; cela est évident d'après ce qui précède.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. STEINER;

(voir page 16);

PAR M. J. MENTION.

IV.

THÉORÈME. — *Le point d'intersection des deux médianes, dans les quadrilatères de bissectrices, est situé sur les trois cercles de neuf points correspondants aux triangles qu'on obtiendra, en prenant les points de rencontre de toutes les bissectrices partant des couples de sommets opposés, respectivement.*

Ainsi je dis que le cercle des neuf points relatif au triangle PQH (*fig.* 1, p. 19) contient le point de concours des médianes. En effet, il est clair que les trois hauteurs de ce triangle passent par le point G, et que les deux médianes rectangulaires aboutissent aux milieux ε, θ de GH et PQ, ces dernières étant séparément diagonales de nos quadrilatères GG'... HH'..., PQ.... Or le cercle des neuf points a pour diamètre la droite $\varepsilon\theta$; donc le théorème est démontré.

Corollaire. — Le cercle des neuf points passe évidemment par les sommets A, C; la diagonale AC sera vue, par conséquent, du point commun aux deux médianes sous le même angle que du milieu de GH, c'est-à-dire sous un angle égal à deux fois AHC, parce que A, C, G, H

appartiennent à un même cercle. Mais

$$\text{AHC} = 2\pi - \text{D} - \pi - \frac{\text{A}+\text{C}}{2} = \frac{\text{B}-\text{D}}{2}.$$

La diagonale BD sera vue du même point sous un angle égal à A — C, la diagonale EF sous un angle égal à A + C. On reconnaîtra bien aisément que, du point de concours des cercles circonscrits aux triangles du quadrilatère proposé, on voit les diagonales AC, BD, EF sous les angles B — D, A — C, A + C.

Ainsi nous avons entièrement prouvé le théorème de M. Steiner, et par des considérations sans doute très-différentes de celles qui l'ont fait découvrir. Nous serions curieux de savoir comment y a été conduit l'auteur, si habile dans l'art d'initier aux beautés géométriques.

V.

Cas particuliers.

Je n'ai pu entreprendre de dessiner complétement la figure, sujet de toutes ces propriétés. Ce serait une véritable épure, et fort délicate. J'examinerai encore les deux cas où le quadrilatère est circonscriptible et inscriptible au cercle, pour lesquels des figures spéciales ne sont point indispensables.

Ier Cas. — Un des cercles de la première série devient infiniment petit; il se confond avec un des triangles du premier quadrilatère de bissectrices. Autrement, les points de rencontre des bissectrices opposées du premier système se réduisent à quatre, et le centre du cercle est l'un des *points-limites* de la série orthogonale; l'autre point-limite est la projection du centre sur la droite unissant les points de rencontre externes.

IIe Cas. — Les bissectrices issues des sommets E, F

forment un rectangle, et le second quadrilatère des bissectrices est aussi un rectangle, inscrit au même cercle que le quadrilatère donné; ce qu'on vérifierait du reste immédiatement. Donc ce cercle fait partie du second groupe, et le cercle décrit sur GH ou EF comme diamètre appartient au premier. Enfin le point de concours des deux lignes centrales est précisément au pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle proposé sur EF. Car ce centre se trouve sur les cercles des neuf points répondant aux triangles PQH, P′Q′H′, lesquels passent aussi respectivement par les sommets A, C; B, D: d'où l'on conclurait que leur corde commune est perpendiculaire sur la droite EF, et équidistante du centre et de cette dernière, qui sera la ligne centrale du premier groupe.

De nos observations se dégagent les deux théorèmes suivants sur le quadrilatère inscrit :

1° Le point de concours des cercles circonscrits aux triangles d'un quadrilatère inscrit au cercle est la projection du centre de celui-ci sur la troisième diagonale.

2° Le cercle décrit sur la troisième diagonale comme diamètre coupe à angle droit le cercle circonscrit au quadrilatère.

SOLUTION DE LA QUESTION 611

(voir page 48);

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Trouver n nombres entiers et positifs dont la somme égale le produit.

Considérons d'abord le cas où ces nombres sont tous différents, et soit a le plus petit d'entre eux; les autres sont $a+\alpha_1$, $a+\alpha_2,\ldots$, $a+\alpha_{n-1}$.

La condition énoncée s'exprime par l'équation

$$a(a+\alpha_1)(a+\alpha_2)\ldots(a+\alpha_{n-1}) = na + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}$$

ou bien

$$a^n + a^{n-1}\Sigma_1 + a^{n-2}\Sigma_2 + \ldots + a^2\Sigma_{n-2} + a.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} = na + \Sigma_1,$$

et encore

$$a(n - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}) = a^n + (a^n - 1)\Sigma_1 + a^{n-2}\Sigma_2 + \ldots + a^2\Sigma_{n-2}.$$

Le second membre est toujours positif, car $a \geqq 1$, ce qui fait que $a^n - 1$ n'est jamais négatif : donc le premier membre doit être aussi positif, c'est-à-dire que

$$n > \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}.$$

Puisque tous ces nombres α_1, $\alpha_2,\ldots$, α_{n-1} sont différents d'après la supposition que nous avons faite, et que le plus grand d'entre eux, α_{n-1}, est évidemment inférieur à n, on aura

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \ldots, \quad \alpha_{n-1} = n-1.$$

Mais l'inégalité

$$n > 1.2.3\ldots(n-2)(n-1)$$

est généralement fausse, et l'on a même

$$n < (n-2)(n-1),$$

car la quantité

$$(n-2)(n-1) - n = n^2 - 4n + 2 = n(n-4) + 2$$

est toujours positive pour $n > 3$ et entier. Ainsi la solu-

tion est impossible à moins que l'on n'ait

$$n = 3, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2.$$

L'équation primitive devient alors

$$a(a+1)(a+2) = 3a+3 = 3(a+1),$$

d'où l'on tire

$$(a+1)(a^2+2a-3) = 0,$$

équation résolue pour $a = 1$. En effet les nombres 1, 2, 3 vérifient l'énoncé.

Pour $n = 2$, on aurait l'équation

$$a(a+1) = 2a+1$$

ou bien

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

qui n'a pas de racine entière.

Donc enfin les nombres 1, 2, 3 fournissent la solution unique.

Le cas où l'on admet que deux ou plusieurs des nombres peuvent être égaux ne mérite pas de nous arrêter, car tous les nombres se décomposent suivant la condition indiquée. La somme des facteurs d'un nombre quelconque étant généralement inférieure à ce nombre, il suffira d'ajouter à cette somme des unités en quantité suffisante. Soit, par exemple, le nombre 10, on aura

$$5.2.1.1.1 = 5+2+1+1+1 = 10.$$

Les nombres premiers eux-mêmes se réduisent à cette règle au moyen d'une identité telle que $7 = 7$, c'est-à-dire en posant $n = 1$.

Enfin nous observerons que cette règle fournit encore l'exemple unique des nombres différents

$$3.2.1 = 3+2+1 = 6.$$

COURBE DONT LA TANGENTE POLAIRE EST CONSTANTE;

PAR M. GIARD,
Sous-lieutenant du génie, Licencié ès Sciences mathématiques.

Équation de la courbe.

Soit k la valeur constante de la tangente; l'équation différentielle de la courbe est

$$\rho = k \cos V \ (*)$$

ou

$$\frac{\rho}{k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}}}.$$

On tire de là

$$\frac{\frac{d\rho}{d\omega}}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{\rho^2} - 1}}.$$

Enfin

$$d\omega = \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{k^2}{\rho^2} - 1}.$$

Prenons le signe + pour le radical, alors ρ croît quand ω croît; nous aurons

$$d\omega = \frac{k.d\rho}{\rho^2}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{k^2}} = \frac{\frac{d\rho}{k}}{\left(\frac{\rho}{k}\right)^2}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{k^2}}$$

(*) V angle du rayon vecteur et de la tangente prise dans le système polaire. TM.

et

$$\omega + C = \int \frac{\frac{d\rho}{k}}{\left(\frac{\rho}{k}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}} - \int \frac{\frac{d\rho}{k}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}}.$$

Or

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}$$

s'obtient en posant

$$x = \frac{1}{z}$$

et devient

$$-\int \frac{zdz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \sqrt{z^2 - 1};$$

nous aurons donc

$$\omega + C = \arccos \frac{l}{k} - \sqrt{\left(\frac{k}{\rho}\right)^2 - 1}.$$

En se reportant à l'équation différentielle

$$\frac{\rho}{k} = \cos V,$$

on voit que l'équation finie de la courbe résulte de l'élimination de V entre les deux équations

$$\frac{\rho}{k} = \cos V,$$
$$-(\omega + C) = \operatorname{tang} V - V.$$

La constante C nous montre qu'une courbe située par rapport à une droite quelconque passant par le pôle comme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{k} = \cos V, \\ -\omega = \operatorname{tang} V - V \end{array} \right.$$

l'est par rapport à l'axe polaire, répond à la question. Ce qui était évident d'après la propriété exprimée par l'équation différentielle.

Si nous avions pris le signe — pour le radical, nous serions arrivés à

$$\frac{\rho}{k} = -\cos V = \cos(\pi - V),$$

$$-\omega = \tang(\pi - V) - (\pi - V)$$

ou

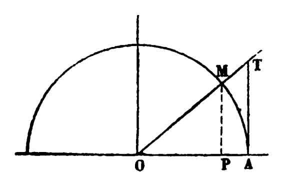
$$\omega = \tang V + \pi - V,$$

courbe identique à (α) située symétriquement par rapport à l'axe polaire.

Il nous suffira donc de discuter

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\rho}{k} = \cos V, \\ -\omega = \tang V - V. \end{array}\right.$$

Si l'on change ρ en $-\rho$, ω ne change pas. Donc la courbe a le pôle pour centre.



Pour construire la courbe, décrivons une circonférence de rayon k. Si $MOA = V$,

$$\rho = OP,$$

et

$$\omega = \frac{\mathrm{TA} - \mathrm{MA}}{k};$$

on voit que la courbe est asymptote au pôle.

Le rayon vecteur diminuant toujours à mesure que la valeur absolue de ω augmente et la courbe faisant avec le rayon vecteur un angle qui part de o, croît constamment et devient droit au pôle.

Du reste, pour avoir cet angle en un point quelconque, il suffit de résoudre l'équation transcendante

$$(-\omega) = \operatorname{tang} V - V.$$

Point d'inflexion.

D'après la forme de la courbe, il doit y avoir un point d'inflexion entre $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$. Cherchons à l'obtenir. Au point d'inflexion

$$\frac{d(V+\omega)}{d\omega} = 0.$$

Or

$$\frac{d(V+\omega)}{d\omega} = \frac{d(V+\omega)}{dV} \cdot \frac{dV}{d\omega}$$

comme

$$\omega = V - \operatorname{tang} V = (2 - \operatorname{séc}^2 V)\frac{dV}{d\omega}.$$

En différentiant l'équation

$$\omega = V - \operatorname{tang} V$$

par rapport à ω, on a

$$1 = \frac{dV}{d\omega}(1 - \operatorname{séc}^2 V),$$

d'où

$$\frac{dV}{d\omega} = -\cot^2 V.$$

On a donc

$$(\text{séc}^2 V - 2)\cot^2 V = 0,$$

qui donne

$$\frac{1}{\cos^2 V} = 2, \qquad V = 45^\circ,$$

$$\cot V = 0, \qquad V = 90^\circ.$$

Interprétons ces résultats.

$V = 45^\circ$ nous donne un point d'inflexion pour

$$(-\omega) = 1 - \frac{\pi}{4} = 0{,}212101:$$

$$\omega = -(12 \text{ à } 13^\circ).$$

Quant à $V = 90^\circ$, cela nous donne un point d'inflexion au pôle; et il y en aurait un en effet si la courbure n'y était point infinie, car toute courbe qui a le pôle pour centre et qui y passe a en ce point un point d'inflexion.

Aire.

Aire décrite par le rayon vecteur :

$$d\lambda = -\frac{1}{2}k^2\cos^2 V . d\omega.$$

Or

$$d\omega = -\text{tang}^2 V dV;$$

donc

$$d\lambda = \frac{1}{2}k^2\sin^2 V . dV,$$

d'où

$$\lambda = C + \frac{1}{4}k^2(V - \sin V\cos V).$$

$C = 0$ si l'on prend l'aire à partir de $V = 0$.
Ainsi l'expression générale de l'aire est

$$\lambda = \frac{1}{4} k^2 (V - \sin V \cos V).$$

Pour $V = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\lambda = \frac{1}{8} \pi k^2.$$

Doublant, on aura pour l'aire totale

$$\frac{1}{4} \pi k^2 = \pi \left(\frac{k}{2}\right)^2,$$

c'est l'aire du cercle dont le rayon est $\frac{k}{2}$. Même résultat que pour la tractrice.

Rectification de la courbe.

$$dS = - d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2},$$

$$d\omega = - \operatorname{tang}^2 V . dV,$$

$$\rho = k \cos V,$$

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{d\rho}{dV} \cdot \frac{dV}{d\omega} = - k \sin V (- \cot^2 V) = k \frac{\cos^2 V}{\sin V}.$$

Donc

$$dS = + \operatorname{tang}^2 V . dV \sqrt{k^2 \cos^2 V (1 + \cot^2 V)}$$

$$= k \frac{\sin^2 V}{\cos V} dv \cdot \frac{1}{\sin V} = k \operatorname{tang} V . dV.$$

Donc

$$S = C + k l \operatorname{s\acute{e}c} V.$$

$C = 0$ si l'on compte à partir du point où $V = 0$,
l'on a pour expression générale de l'arc de courbe

$$S = kl\,\text{séc}\,V = kl\,\frac{k}{\rho}.$$

Équation finie de la courbe.

L'équation finie de la courbe en prenant S pour riable indépendante est donc

$$e^{\frac{S}{k}} = \frac{k}{\rho},$$

d'où

$$\rho = ke^{-\frac{S}{k}}.$$

Si l'on se reporte à l'équation finie de la *tractrice* en S en y, on verra qu'elle est

$$y = ke^{-\frac{S}{k}}.$$

On pourrait donner à la spirale que nous venons tudier le nom de *tractrice polaire*.

Pour la construction de la courbe, les points à t gente horizontale seront donnés par l'équation

$$V + \omega = n\pi;$$

et comme $\omega = -(\text{tang}\,V - V) = V - \text{tang}\,V$,

$$2V - \text{tang}\,V = n\pi,$$

n étant entier quelconque.

Les points à tangente verticale par

$$V + \omega = (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$2V - \operatorname{tang} V = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

PROBLÈME SUR UNE CONIQUE PASSANT PAR QUATRE POINTS DONNÉS;

PAR M. VINCENZO JANNI (DE NAPLES).

Construire la conique qui, passant par quatre points donnés, soit perpendiculaire à une droite donnée.

Soient

$$y - ax - h = 0, \quad y - a'x - h' = 0,$$

les équations de deux côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les points donnés, et

$$y - \alpha x - \beta = 0, \quad y - \alpha x - \beta' = 0,$$

celles des autres côtés. L'équation d'une conique quelconque qui passe par les quatre points sera de la forme

$$(y - ax - h)(y - a'x - h')$$
$$+ k(y - \alpha x - \beta)(y - \alpha' x - \beta') = 0.$$

Prenons la droite donnée pour axe des x, et concevons que l'origine soit le point inconnu où la conique doit couper la droite donnée; alors h, h', β, β' seront des quantités inconnues qui doivent satisfaire aux deux relations

$$hh' + k\beta\beta' = 0, \quad h + h' + k(\beta + \beta') = 0,$$

qui donnent

$$\frac{hh'}{h+h'} = \frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'}.$$

Cela posé, soient AC, BC deux côtés opposés du quadrilatère et AB la droite donnée; si nous recherchons la courbe dont les ordonnées perpendiculaires à la droite AB soient égales à $\frac{hh'}{h+h'}$, on voit qu'elle est une hyperbole qui passe par les points A, B, et O milieu de la perpendiculaire CP à AB, et qui a pour son asymptote la droite MN perpendiculaire à AB, et pour laquelle on a $MH = HN$: la courbe est donc déterminée.

De la même manière on construit l'hyperbole dont les ordonnées perpendiculaires à la droite AB soient égales à $\frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'}$; et il est clair que les pieds des perpendiculaires abaissées des points d'intersection de ces deux courbes sur la droite AB sont chacun un cinquième point de la conique cherchée. Puisque les deux hyperboles ont deux asymptotes parallèles, on n'a que trois solutions.

DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES DE M. STEINER;

PAR M. VINCENZO JANNI.

Si deux coniques touchent les côtés d'un quadrilatère, les huit points de contact se trouvent sur une autre conique.

L'équation d'une conique qui touche les côtés d'un quadrilatère est de la forme

$$m^2 E^2 - 2m(AC + BD) + F^2 = 0$$

(SALMON, *Sections coniques*, § 288.)

dans laquelle A, C sont les équations de deux côtés opposés du quadrilatère, B, D celles des autres, E, F les diagonales. Toutes ces quantités sont liées par la relation

$$AC - BD = EF.$$

On obtient les points de contact en mettant successivement $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, de manière qu'ils sont déterminés par les équations

$$(A = 0,\ mE + F = 0), \quad (C = 0,\ mE + F = 0),$$
$$(B = 0,\ mE - F - 0), \quad (D = 0,\ mE - F = 0),$$

où l'on voit que les droites qui joignent les points de contact passent par l'intersection des diagonales et forment de plus un faisceau harmonique. Une conique qui passe par ces points de contact est donc de la forme

$$m^2 E^2 - 2m(AC + BD) + F^2 + k(m^2 E^2 - F^2) = 0.$$

De même une conique qui passe par les points de contact d'une autre conique qui touche les côtés du même quadrilatère aura pour équation

$$m'^2 E^2 - 2m'(AC + BD) + F^2 + k'(m'^2 E^2 - F^2) = 0.$$

Or ces deux équations peuvent devenir identiques faisant

$$k = \frac{m' - m}{m' + m} \quad \text{et} \quad k = -k',$$

et l'équation de la conique qui passe par les huit points sera

$$mm' E^2 - (m + m')(AC + BD) + F^2 = 0.$$

THÉORÈME SUR UN QUADRILATÈRE CIRCONSCRIT A UNE PARABOLE;

PAR M. VINCENZO JANNI.

Si un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer à deux sommets opposés est égal au produit des deux autres.

L'équation de la tangente à la parabole est de la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{m}{\cos\alpha} = 0$$

(SALMON, *Sections coniques*, § 224).

Si l'on cherche la distance du foyer au point d'intersection de deux tangentes, on a immédiatement

$$D = \frac{m}{\cos\alpha\cos\alpha'};$$

de cette expression on déduit intuitivement le théorème énoncé.

THÉORÈME SUR LES CERCLES OSCULATEURS A UNE ELLIPSE;

PAR M. VINCENZO JANNI.

Par chaque point d'une ellipse passent toujours trois cercles osculateurs à trois points de la courbe, et l'aire du triangle qui a pour sommets ces points est constante.

Soit x', y' un point de l'ellipse

$$a^2y^2 + h^2x^2 = a^2h^2,$$

la corde commune à l'ellipse et au cercle osculateur qui passe par x', y' est

$$y - y' = \frac{h^2}{a^2}\frac{x'}{y'}(x - x');$$

éliminant y ou x, on a

$$4x'^3 - 3a^2x' - a^2x = 0, \quad 4y'^3 - 3h^2y' - h^2y = 0.$$

Or si nous regardons fixe le point x, y, il y a trois points x', y' dont les cercles osculateurs passent par x, y; parce que x', y' sont donnés par des équations du troisième degré qui ont les racines toujours réelles, elles sont identiques à l'équation qui sert à partager un angle donné en trois parties égales. Or en mettant

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi,$$

on a

$$\frac{y}{h} = \sin\varphi.$$

Donc les racines des deux équations ci-dessus seront

$$x' = a\cos\frac{1}{3}\varphi,$$

$$x'' = a\cos\frac{1}{3}(360^\circ - \varphi),$$

$$x''' = a\cos\frac{1}{3}(360^\circ + \varphi);$$

$$y' = h\cos\frac{1}{3}(270^\circ + \varphi),$$

$$y'' = h\cos\frac{1}{3}(90^\circ - \varphi),$$

$$y''' = h\cos\frac{1}{3}(450^\circ - \varphi).$$

Substituant ces valeurs dans la formule

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

parce qu'on a

$$x' + x'' + x''' = 0, \quad y' + y'' + y''' = 0,$$

on obtient la surface du triangle $= \frac{3}{4} ah\sqrt{3}$.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir page 31);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ VII. — *Angles de déviation des rayons infiniment voisins.*

Supposons que l'on donne deux droites dans l'espace, que de deux points de la seconde on abaisse des perpendiculaires sur la première. Soient a et b les pieds de ces perpendiculaires. Nommons *angle de déviation des deux droites pour le segment ab* l'angle que ces perpendiculaires forment entre elles. Cet angle devient égal à deux angles droits quand les points a et b s'éloignent à l'infini

sur la droite, l'un dans un sens, l'autre en sens contraire. Pour tout segment fini, l'angle de déviation est moindre que deux droits. Si les deux droites sont situées dans un même plan, l'angle de déviation est nul ou égal à 2π quel que soit le segment. Il est nul si le segment contient le point d'intersection des deux rayons, il est égal à 2π dans le cas contraire. Soient a, b, c trois points de la première droite, l'angle de déviation du segment bc est égal à la différence des angles de déviation des segments ac et ab. Ainsi l'angle de déviation d'un segment quelconque donné est déterminé par les angles de déviation de deux segments comptés à partir d'un point donné.

Pour étudier les déviations des rayons d'un système infiniment voisin d'un rayon donné, nous compterons toutes les déviations à partir de l'origine de ce rayon, point dont l'abscisse est nulle.

Soit dq la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point appartenant à un rayon infiniment voisin d'un rayon donné; soit R l'abscisse du pied de cette perpendiculaire; soit α l'angle que forme dq avec une perpendiculaire au premier plan principal. De plus, soient dq_0 et α_0 les valeurs de dq et α pour l'origine du rayon donné. D'après l'équation (4) (§ VI), on a les équations

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} dq\cos\alpha &= -\,\mathfrak{A}_2\,du - \mathfrak{B}_2\,dv, \\ dq\sin\alpha &= +\,\mathfrak{A}_1\,du + \mathfrak{B}_1\,dv, \end{aligned} \right.$$

après avoir posé

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}'\,t_1 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}'\,t_2 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}t_2)}{\mathrm{V}_2},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g}t + \mathrm{R}\,(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g}t_2 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}t_2)}{\mathrm{V}_2}.$$

En conséquence, pour $R = 0$, on a

$$(2)\quad \begin{cases} dq_0 \cos\alpha_0 = -\dfrac{\mathfrak{e}+\mathfrak{f}'t_2}{V_2}\,du - \dfrac{\mathfrak{f}+\mathfrak{g}t_2}{V_2}\,dv, \\[2ex] dq_0 \sin\alpha_0 = +\dfrac{\mathfrak{e}+\mathfrak{f}'t_1^2}{V_1}\,du - \dfrac{\mathfrak{f}+\mathfrak{g}t_1}{V_1}\,dv \end{cases}$$

et aussi

$$(3)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0 = -\dfrac{R(\mathcal{E}+\mathcal{F}t_2)}{V_2}\,du - \dfrac{R(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_2)}{V_2}\,dv, \\[2ex] dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0 = +\dfrac{R(\mathcal{E}+\mathcal{F}t_1)}{V_1}\,du + \dfrac{R(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)}{V_1}\,dv. \end{cases}$$

De ces deux équations, on tire

$$(4)\quad \begin{cases} du = \dfrac{dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0}{RV_1} - \dfrac{dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0}{RV_2}, \\[2ex] dv = \dfrac{(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0)\,t_1}{RV_1} - \dfrac{(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0)\,t_2}{RV_2}. \end{cases}$$

Si l'on a égard aux équations (2) ainsi qu'aux relations

$$\mathfrak{e} + (\mathfrak{f}+\mathfrak{f}')\,t_1 + \mathfrak{g}t_1^2 = -r_1V_1^2,$$

$$\mathfrak{e} + (\mathfrak{f}+\mathfrak{f}')\,t_2 + \mathfrak{g}t_2^2 = -r_2V_2^2,$$

$$\mathfrak{e} + \frac{1}{2}(\mathfrak{f}+\mathfrak{f}')(t_1+t_2) + \mathfrak{g}t_1t_2 = 0,$$

$$V_1V_2 = \Delta(t_2 - t_2),$$

on obtient

$$(5)\quad \begin{cases} R\,dq_0\cos\alpha_0 = -r_2(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha) \\ \qquad\qquad + \left(\dfrac{\mathfrak{f}-\mathfrak{f}'}{2\Delta}\right)(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0) \\[2ex] R\,dq_0\sin\alpha_0 = -\left(\dfrac{\mathfrak{f}-\mathfrak{f}'}{2\Delta}\right)(dq\cos\alpha - dq_0\cos\alpha_0) \\ \qquad\qquad - r_1(dq\sin\alpha - dq_0\sin\alpha_0), \end{cases}$$

et puisque, d'après l'équation (15) (§ IV),

$$\left(\frac{f - f'}{2\Delta}\right)^2 = d^2 - \delta^2 = \rho_1\rho_2 - r_1 r_2,$$

on obtient pour $dq\cos\alpha$ et $dq\sin\alpha$ les expressions suivantes

$$(6)\left\{\begin{aligned} dq\cos\alpha &= \left(1 - \frac{R r_1}{\rho_1\rho_2}\right) dq_0\cos\alpha_0 - \frac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, dq_0\sin\alpha_0,\\ dq\sin\alpha &= \frac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, dq_0\cos\alpha_0 + \left(1 - \frac{R r_2}{\rho_1\rho_2}\right) dq_0\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Ces deux égalités montrent comment pour chaque point d'un rayon la perpendiculaire dq et l'angle correspondant α se déterminent au moyen du segment compté à partir de l'origine du rayon jusqu'au point considéré. En divisant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$(7)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{R\sqrt{d^2-\delta^2}\cos\alpha_0 + (\rho_1\rho_2 - R r_2)\sin\alpha_0}{(\rho_1\rho_2 - R r_1)\cos\alpha_0 - R\sqrt{d^2-\delta^2}\sin\alpha_0}.$$

L'angle de déviation d'un rayon donné avec un rayon infiniment voisin en un point dont l'abscisse est R, est égal à $\alpha - \alpha_0$, comme nous l'avons dit plus haut. Désignons cet angle par β :

$$\beta = \alpha - \alpha_0 \quad \text{et} \quad \alpha = \beta + \alpha_0.$$

L'équation (7) donne donc

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{R\left(\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0\right)}{\rho_1\rho_2 - R\left(r_1\cos^2\alpha_0 + r_2\sin^2\alpha_0\right)}.$$

La tangente de l'angle de déviation est donc nulle quand $R = 0$. Elle est aussi nulle, et par suite $\beta = 0$ ou $\beta = 2\pi$, si

$$(9)\qquad \sqrt{d^2-\delta^2} = d\sin 2\alpha_0,$$

ou bien si

$$\sin 2\alpha_0 = \cos\gamma,$$

ou encore si

$$\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{2}\gamma,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \omega_1 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant les angles que forment les plans focaux avec le premier plan principal. Ainsi, pour les deux rayons infiniment voisins situés dans les plans focaux, l'angle de déviation est toujours nul ou égal à deux droits. Cela résulte d'ailleurs de ce que chacun de ces rayons se trouve dans un même plan avec le premier rayon.

Dans les systèmes de rayons à surfaces focales imaginaires, qui n'ont pas par suite de plans focaux, l'angle de déviation n'est jamais nul, et par suite la déviation ne peut changer de signe.

Si deux rayons infiniment voisins d'un pareil système sont tels, que la déviation de l'un autour de l'autre se fait toujours de gauche à droite, deux rayons infiniment voisins quelconques sont nécessairement dans le même cas. Les systèmes à surfaces focales imaginaires peuvent donc se diviser en deux classes : les systèmes ou les déviations d'un rayon autour d'un rayon infiniment voisin se font de gauche à droite, et ceux où elles se font de droite à gauche. Du reste, à tout système de rayons à surfaces focales réelles ou imaginaires en correspond un autre, symétrique ou équivalent, en ce sens qu'il ne diffère du premier que par le sens des déviations des rayons les uns autour des autres. Cette différence est exprimée analytiquement par la différence des signes des racines de l'équation quadratique.

Supposons les foyers d'un rayon réels, examinons les angles de déviation que l'on obtient en passant de l'origine aux foyers. Soient β_1 et β_2 ces angles. Pour β_1, nous aurons $R = \rho_1$, et pour β_2, $R = \rho_2$. Au moyen des équations (14) (§ IV), d'où il résulte que

$$r_1 \cos^2\alpha_0 + r_2 \sin^2\alpha_0 = m - d\cos 2\alpha_0,$$

on trouve

$$(10)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\beta_1 = \dfrac{\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0}{\delta + d\cos 2\alpha_0}, \\ \operatorname{tang}\beta_2 = \dfrac{\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0}{-\delta + d\cos 2\alpha_0}. \end{cases}$$

A l'aide des équations (18) (§ IV) qui donnent les angles ω_1 et ω_2 des plans focaux avec un plan principal, nous trouverons

$$(11)\qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\beta_1 = \dfrac{\sin 2\omega_1 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_1 - \cos 2\alpha_0} = \operatorname{tang}(\omega_1 - \alpha_0), \\ \operatorname{tang}\beta_2 = \dfrac{\sin 2\omega_2 - \sin 2\alpha_0}{\cos 2\omega_2 - \cos 2\alpha_2} = \operatorname{tang}(\omega_2 - \alpha_0). \end{cases}$$

Donc

$$(12)\qquad \beta_1 = \omega_1 - \alpha_0, \quad \beta_2 = \omega_2 - \alpha_0.$$

Donc *les angles de déviation des segments compris entre les foyers d'un rayon ont la même valeur quel que soit le rayon infiniment voisin du premier que l'on considère. La valeur de ces angles n'est autre que celle de l'inclinaison des plans focaux du rayon considéré.*

Si l'on se donne la valeur de l'angle de déviation β, on peut déterminer l'abscisse R pour laquelle l'angle de déviation d'un rayon donné et d'un rayon infiniment voisin a cette valeur. L'équation (8) donne cette valeur

de R

$$(14)\quad R = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{(r_1 \cos^2\alpha_0 + r_2 \sin^2\alpha_0)\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d\sin 2\alpha_0 \cos\beta}.$$

En mettant pour r_1 et r_2 leurs valeurs $m - d$ et $m + d$, nous obtenons l'expression plus simple

$$(15)\quad R = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m \sin\beta + \sqrt{d^2 - \delta^2}\cos\beta - d\sin(2\alpha_0 + \beta)}.$$

Supposons que R soit fonction de α seulement, β étant une constante donnée, R sera maximum quand on aura

$$\sin(2\alpha_0 + \beta) = +1 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta;$$

R sera minimum quand on aura

$$\sin(2\alpha_0 + \beta) = -1, \quad \alpha_0 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta.$$

Désignons le maximum de R par R_1 et son minimum par R_2, nous aurons

$$(16)\quad \begin{cases} R_1 = \dfrac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2 - \delta^2}\cos\beta - d}, \\[2ex] R_2 = \dfrac{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}{m\sin\beta + \sqrt{d^2 - \delta^2}\cos\beta + d}. \end{cases}$$

Nous tirons de là

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{[1 - \sin(2\alpha_0 + \beta)]\,d}{\rho_1 \rho_2 \sin\beta} \\[2ex] \qquad = \dfrac{2\sin^2\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi\right) d}{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}, \\[2ex] \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R} = \dfrac{[1 + \sin(2\alpha_0 + \beta)]\,d}{\rho_1 \rho_2 \sin\beta} \\[2ex] \qquad = \dfrac{2\cos^2\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi\right) d}{\rho_1 \rho_2 \sin\beta}, \end{cases}$$

puis

$$(18)\quad \frac{1}{R}=\frac{\cos^2\left(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\right)\pi}{R_1}=\frac{\sin^2\left(\alpha_0+\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{4}\pi\right)}{R_2}.$$

Supposons que l'on veuille prendre sur tous les rayons infiniment voisins d'un rayon donné des segments tels, que l'angle de déviation correspondant soit constant. La formule (18) nous donne ces segments pour un rayon quelconque infiniment voisin en fonction du plus grand et du plus petit d'entre ces segments et à l'angle que fait la direction de l'origine de ce rayon avec la direction de l'origine du rayon sur lequel se trouve le plus grand segment. Cette formule est tout à fait analogue à la formule d'Euler qui donne le rayon de courbure d'une section normale en fonction des rayons de courbure principaux et de l'angle que fait la section normale avec une des sections principales. La formule d'Euler n'est, du reste, qu'un cas particulier de la formule (18) comme nous le verrons plus loin.

Dans le cas où l'angle constant de déviation est égal à un droit, on a

$$(19)\qquad \frac{1}{R}=\frac{\cos^2\alpha_0}{R_1}+\frac{\sin^2\alpha_0}{R_2}.$$

La propriéte exprimée par cette formule a été trouvée pour la première fois par Hamilton dans le supplément dont il a été question, mais par des considérations différentes de celles que nous avons employées. Hamilton n'a point considéré les angles de déviation si utiles dans l'étude des systèmes de rayons.

§ VIII. — *Des pinceaux infiniment petits et des rayons principaux.*

Dans les deux équations (6) (§ VII)

$$(1)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_1}{\rho_1\rho_2}\right) dq_0\cos\alpha_0 - \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, dq_0\sin\alpha_0, \\ dq\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, dq_0\cos\alpha_0 + \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_1}{\rho_1\rho_2}\right) dq_0\sin\alpha_0, \end{cases}$$

on peut considérer dq et α comme les coordonnées polaires de la circonférence de la section d'un pinceau infiniment mince. L'abscisse de la section est R, dq_0 et α_0 sont les coordonnées polaires de la courbe qui donne la section passant par l'origine du rayon. Ces équations peuvent servir, non pas à comparer les aires des sections d'un pinceau (ce qui a déjà été fait), mais à faire voir comment la forme d'une section quelconque dépend de celle de l'une d'entre elles. Si des coordonnées polaires de deux sections on passe aux coordonnées rectangulaires, en choisissant des axes dans les plans principaux du rayon auxquels tous les autres rayons du faisceau sont infiniment voisins, on a

$$(2)\quad \begin{cases} dq\cos\alpha = x, & dq\sin\alpha = y, \\ dq_0\cos\alpha_0 = x_0, & dq_0\sin\alpha_0 = y_0, \end{cases}$$

x et y sont les coordonnées infiniment petites des points de la circonférence de la section.

Les équations (1) donnent

$$(3)\quad \begin{cases} x = \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_1}{\rho_1\rho_2}\right) x_0 - \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, y_0, \\ y = \dfrac{\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}}{\rho_1\rho_2}\, x_0 + \left(1 - \dfrac{\mathrm{R}r_2}{\rho_1\rho_2}\right) y_0 \end{cases}$$

ou

$$(4)\quad \begin{cases} (\rho_1 - \mathrm{R})(\rho_2 - \mathrm{R})x_0 = (\rho_1\rho_2 - \mathrm{R}r_2)x + \mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}\,y, \\ (\rho_1 - \mathrm{R})(\rho_2 - \mathrm{R})y_0 = -\mathrm{R}\sqrt{d^2-\delta^2}\,x + (\rho_1\rho_2 - \mathrm{R}r_1)y. \end{cases}$$

Ainsi les circonférences des sections d'un pinceau infiniment petit sont des courbes du même degré, et elles sont dans le rapport de collinéation exprimé par les équations précédentes.

Les sections d'un pinceau passant par les foyers méritent un examen particulier. Pour ces sections, la mesure de la densité est infiniment grande, leur aire est donc un infiniment petit d'un ordre supérieur. Si l'on pose

$$\mathrm{R} = \rho_1 \quad \text{ou} \quad \mathrm{R} = \rho_2,$$

les équations (4) sont identiques ainsi que les équations (3) et elles donnent

$$(5)\quad \begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{d+\delta}}\,x \quad \text{pour} \quad \mathrm{R} = \rho_1, \\ y = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{d-\delta}}\,x \quad \text{pour} \quad \mathrm{R} = \rho_2. \end{cases}$$

Ce sont les équations de deux lignes droites infiniment petites, puisque les coordonnées x et y ont des valeurs infiniment petites.

Donc *les sections d'un pinceau infiniment petit qui passent par les deux foyers sont deux droites infiniment petites.*

Cela veut dire que l'une des dimensions, qui dans les sections ordinaires sont des infiniment petits du premier ordre, devient un infiniment petit d'un ordre supérieur. Il résulte aussi de ceci que *la surface qui limite un pinceau infiniment petit à foyers réels peut être engendrée par une droite qui s'appuierait constamment sur une*

courbe infiniment petite et sur deux droites perpendiculaires à un rayon passant dans l'intérieur de la petite courbe et perpendiculaire au plan de cette courbe.

Pour déterminer les directions et les longueurs des sections passant par les foyers, il est bon de repasser aux coordonnées polaires dq, α, dq_0, et a_0. Dans les équations (1) posons

$$R = r_1,$$

et remarquons que

$$\rho_2 - r_1 = d + \delta, \quad \rho_2 - r_2 = -d + \delta,$$

nous obtenons pour la section qui passe par le premier foyer

$$(6) \quad \begin{cases} \rho_2 dq \cos\alpha = (d + \delta)\, dq_0 \cos\alpha_0 - \sqrt{d^2 - \delta^2}\, dq_0 \sin\alpha_0, \\ \rho_2 dq \sin\alpha = \sqrt{d^2 + \delta^2}\, dq_0 \cos\alpha_0 - (d - \delta)\, da_0 \sin\alpha_0. \end{cases}$$

Introduisons dans ces formules l'angle ω_1 du premier plan focal avec le premier plan principal, nous aurons, équation (18) (§ IV),

$$\sin\omega_1 = \sqrt{\frac{d-\delta}{2d}}, \quad \cos\omega_1 = \sqrt{\frac{d+\delta}{2d}};$$

donc

$$(7) \quad \begin{cases} \rho_2 dq \cos\alpha = 2d \cos\omega_1 \cos(\alpha_0 + \omega_1)\, dq_0, \\ \rho_2 dq \sin\alpha = 2d \cos\omega_1 \cos(\alpha_0 + \omega_1)\, dq_0, \end{cases}$$

d'où

$$(8) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_1 \quad \text{ou} \quad \alpha = \omega_1.$$

α est constant; donc la section dont les coordonnées sont dq et α est une portion de ligne droite passant par le pôle. L'équation $\alpha = \omega_1$ donne aussi la direction de cette droite.

Pour $R = \rho_2$, ou pour la section passant par le second

foyer, on obtient d'une manière analogue

$$(9)\quad \begin{cases} \rho_1\, dq \cos\alpha = 2d \cos\omega_2 \cos(\alpha_0 + \omega_2)\, dq_0, \\ \rho_1\, dq \sin\alpha = 2d \sin\omega_2 \cos(\alpha_0 + \omega_2)\, dq_0, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\omega_2 \quad \text{ou} \quad \alpha = \omega_2.$$

On a donc le théorème suivant :

Les deux droites infiniment petites qui forment les sections focales d'un pinceau infiniment petit sont situées dans ses plans focaux.

Pour la section passant par le premier foyer, c'est-à-dire pour $\alpha = \omega_1$, on a, d'après l'équation (7),

$$(11)\qquad dq = \frac{2d}{\rho_2}\, dq_0 \cos(\alpha_0 + \omega_1).$$

Si, comme nous l'avons supposé, la circonférence de la section du pinceau qui passe par son origine est déterminée et donnée, dq_0 est déterminé et fonction de α_0, et par l'équation (11) dq est déterminé et fonction de α_0. Comme d'ailleurs la courbe dont dq est le rayon vecteur est une droite passant par le pôle, la longueur de dq est égale à la différence des deux valeurs extrêmes que peut prendre dq considéré comme fonction de α_0, ou plutôt, l'une de ces valeurs étant négative et l'autre positive, la longueur de dq est égale à la somme des valeurs absolues de son maximum et de son minimum. On obtient de la même manière la longueur de la section qui passe par le second foyer au moyen de l'équation

$$(12)\qquad dq = \frac{2d}{\rho_1}\, dq_0 \cos(\alpha_0 + \omega_2).$$

Dans le cas le plus simple où la section du pinceau serait un cercle infiniment petit, dq_0 est constant, et les

valeurs extrêmes de dq pour la section qui passe par le premier foyer s'obtiennent en posant

$$\alpha_0 + \omega_1 = 0, \quad \alpha_0 + \omega_1 = \pi$$

et sont égales à

$$\frac{2d}{\rho_2} dq \quad \text{et} \quad -\frac{2d}{\rho_2} dq_0.$$

La somme de leurs valeurs absolues est donc $\frac{4d}{\rho_2} dq_0$. La longueur de la section passant par le second foyer est $\frac{4d}{\rho_1} dq_0$. Ces deux longueurs sont proportionnelles à la distance des deux sections à la section circulaire qui passe par l'origine. Si l'on cherche dans quel cas la longueur de la section qui passe par l'un des foyers est nulle, on trouve, d'après les équations (11) et (12), que ce cas se présente quand $d = 0$ et seulement quand $d = 0$. La condition $d = 0$ entraîne $\delta = 0$, puisque δ n'est jamais plus grand que d; il faut donc que l'on ait

$$r_2 = r_1, \quad \text{et} \quad \rho_2 = \rho_1,$$

c'est-à-dire que pour ce pinceau, il faut que les points limites et les foyers viennent se confondre avec le centre. Nommons, d'après Hamilton, *rayons principaux* les rayons tels, que tous leurs rayons infiniment voisins passent par un de leurs points. Ces rayons principaux ne peuvent exister que quand les deux surfaces des points limites et avec elles les deux surfaces focales ont des points communs. Dans ce cas, il existe toujours des rayons principaux, que les points communs soient des points de contact, des points d'intersection ou des points situés sur des courbes d'intersection.

Les plans principaux des rayons principaux sont indéterminés.

Dans le système tout particulier où tous les rayons passent par un même point, tous les rayons sont des rayons principaux. Il est aisé de voir que ce système est le seul pour lequel ce cas se présente. Il existe une infinité de systèmes qui ont des séries continues de rayons principaux ; ces séries forment des surfaces. Tel est, par exemple, le système des tangentes communes à deux surfaces du second degré confocales ; toutes les tangentes à la courbe d'intersection des deux surfaces sont des rayons principaux. Il existe une infinité de systèmes qui possèdent des rayons principaux isolés.

Les rayons principaux ne se présentent pas en général dans le système le plus général, parce que les valeurs de u et de v qui correspondent à un rayon principal sont liées par trois équations.

Puisque les plans principaux d'un rayon principal sont indéterminés, l'équation quadratique (4) (§ II) doit s'évanouir ; il faut donc que l'on ait

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{g}\mathfrak{F} - \frac{1}{2}(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\mathfrak{G} = 0, \\ \mathrm{e}\mathfrak{G} - \mathrm{g}\mathfrak{E} = 0, \\ \frac{1}{2}(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\mathfrak{E} - \mathrm{e}\mathfrak{F} = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations se réduisent en général à deux. Excepté le cas où $\mathfrak{F} = 0$, l'une d'elles est une conséquence des deux autres. Mais il y a une troisième équation résultant de ce que le rayon doit avoir un foyer réel ; il faut que $\delta = 0$, ce qui donne

$$(14)\qquad \mathrm{f}+\mathrm{f}'.$$

Supposons maintenant que pour un rayon les deux foyers coïncident avec le centre, les points limites ne

coïncidant pas avec le centre. Le pinceau infiniment petit correspondant n'a qu'une section rectiligne; elle passe par le centre, renferme en même temps les deux foyers et se trouve dans le plan avec lequel coïncident, dans ce cas, les deux plans focaux. D'après l'équation

$$\sin\gamma = \frac{\delta}{d},$$

γ est nul en même temps que δ ou l'angle des sections rectilignes est nul en même temps que la distance des foyers. La condition pour que les deux foyers coïncident ne donne qu'une équation entre u et v. Il en résulte que les systèmes de rayons ont des suites continues de rayons jouissant de cette propriété et formant des surfaces réglées, que par suite les surfaces focales se coupent, en général, suivant des courbes déterminées, puisque toutes les tangentes à ces courbes sont des rayons jouissant de cette propriété que leurs deux foyers coïncident avec le centre. Il existe ainsi toute une famille de systèmes de rayons pour lesquels tous les rayons jouissent de cette propriété, parce que leurs surfaces focales coïncident et ne forment qu'une seule surface.

§ IX. — *Comparaison de la théorie générale des systèmes de rayons avec la théorie particulière de la courbure des surfaces et des systèmes de normales aux surfaces.*

Les systèmes de rayons dont nous venons d'exposer la théorie générale, renferment, comme cas particulier, les systèmes dont tous les rayons sont normaux à une même surface. Pour ce système, les expressions que nous avons désignées par f et f' et qui sont formées par la combinaison des quotients différentiels partiels de x, y, z, ξ, η, ζ,

sont égales l'une à l'autre. Si l'on donne une surface à laquelle tout rayon du système doit être normal, si l'on désigne par x', y', z', les coordonnées du point de cette surface où le rayon $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, doit être normal et par r la distance du point x', y', z' à l'origine x, y, z, du rayon, on aura

$$(1) \qquad x' = x + r\xi, \quad y' = y + r\eta, \quad z' = z + r\zeta,$$

et puisque le rayon est normal à la surface on a aussi

$$(2) \qquad \xi dx' + \eta dy' + \zeta dz' = 0.$$

Remplaçons x', y', z' par leurs valeurs dans cette relation, nous trouverons

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi dx + \eta dy + \zeta dz + dr(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \\ \quad + r(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta) = 0, \end{array} \right.$$

et par suite

$$(4) \qquad \xi dx + \eta dy + \zeta dz = -dr$$

ou

$$(5) \qquad (\xi a + \eta b + \zeta c)du + (\xi a' + \eta b' + \zeta c')dv = -dr.$$

Le premier membre de cette équation doit donc être une différentielle complète d'une fonction $-r$ de deux variables indépendantes u et v. Il faut donc que

$$(6) \qquad \frac{d(\xi a + \eta b + \zeta c)}{dv} = \frac{d(\xi a' + \eta b' + \zeta c')}{du}$$

et puisque l'on a

$$\frac{da}{dv} = \frac{da'}{du}, \quad \frac{db}{dv} = \frac{db'}{du}, \quad \frac{dc}{dv} = \frac{dc'}{du},$$

on a aussi

$$a\mathrm{a}' + b\mathrm{b}' + c\mathrm{c}' = a'\mathrm{a} + b'\mathrm{b} + c'\mathrm{c}$$

ou

$$f = f'.$$

Cette équation doit être identique pour que le système de rayons soit un système de normales à une surface. Si cette condition est satisfaite, il en résulte que l'on peut déterminer r en fonction de u et de v au moyen de l'équation (4). Pour une telle valeur de r, les équations (1) représentent une surface à laquelle les rayons du système sont normaux. Comme dans l'intégrale de l'équation (4) il entre une constante arbitraire, on a non-seulement une surface qui satisfait à la question, mais on a une série de surfaces connues sous le nom de surfaces *parallèles*.

Pour $f = f'$ l'équation quadratique (5) (§ IV), dont les racines sont τ_1 et τ_2, est la même que l'équation quadratique (4) (§ II) dont les racines sont t_1 et t_2. L'équation (9) (§ II), dont les racines sont ρ_1 et ρ_2, devient aussi la même que l'équation (16) (§ II), dont les racines sont r_1 et r_2. Il résulte de là que

Dans les systèmes dont tous les rayons sont normaux à une surface, les deux plans focaux de chaque rayon coïncident avec ses deux plans principaux, et ses deux foyers coïncident avec ses points limites des plus courtes distances.

Considérons une des surfaces auxquelles tous les rayons du système sont normaux comme la surface d'où ces rayons sont issus. Les abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers, ou, ce qui revient au même, les abscisses r_1 et r_2 des points limites, deviennent les rayons de courbure principaux de la surface. Les surfaces focales qui coïncident avec celles des plus courtes distances ne sont autres que les surfaces étudiées par Monge, sur lesquelles se trouvent tous les centres de courbure de la surface. La théorie de la courbure des surfaces peut donc être considérée comme un

cas particulier de la théorie générale des systèmes de rayons. Il n'est pas sans intérêt d'examiner quelle est la relation qui existe entre les théorèmes généraux que nous avons démontrés et les théorèmes connus de la courbure des surfaces.

En examinant si la théorie générale des systèmes de rayons ne nous donne pas quelques théorèmes nouveaux pour la théorie de la courbure des surfaces et celle des normales, nous n'avons rien trouvé de bien remarquable, comme on pouvait s'y attendre. On pourrait citer cependant le théorème auquel donne lieu l'équation

$$r = r_1 \cos^2 \omega + r_2 \sin^2 \omega.$$

Il exprime une propriété générale des normales à une surface et pourrait, par conséquent, entrer dans la théorie particulière de ces normales. La propriété exposée (§ VIII) sur les pinceaux infiniment petits donne aussi un théorème sur les normales aux surfaces qui n'est pas encore connu, je crois. On peut l'énoncer ainsi :

En un point d'une surface, les deux plans normaux principaux sont coupés par toutes les normales aux points infiniment voisins de la surface du point donné, de telle manière que les distances des points d'intersection au point donné sont, pour l'un des plans normaux, égales au plus grand rayon de courbure et pour l'autre au plus petit rayon de courbure.

Si l'on parcourt tous les théorèmes donnés dans la théorie de la courbure des surfaces et dans celle des normales, on trouve toujours des théorèmes correspondants dans la théorie générale des systèmes de rayons.

Considérons les deux sections normales principales en un point donné d'une surface, elles donnent le plus grand et le plus petit rayon de courbure. Dans la théorie générale, nous avons d'un côté les plans principaux et de

l'autre les plans focaux. Les propriétés des normales aux surfaces se divisent dans la théorie générale : une partie des propriétés correspondantes se rapporte aux plans principaux et une autre aux plans focaux. Les plans principaux jouissent de ces propriétés : Ils sont toujours réels et perpendiculaires entre eux; les plans focaux renferment les deux rayons infiniment voisins du rayon donné qui le coupent. Aux centres de courbure principaux des surfaces correspondent les points limites des plus courtes distances et les foyers, et par suite aux surfaces qui renferment ces centres de courbure correspondent les surfaces des points limites et les surfaces focales. Les surfaces des points limites jouissent de cette propriété qu'elles limitent dans l'espace une région où se trouvent toutes les plus courtes distances de deux rayons infiniment voisins, et les surfaces focales jouissent de cette autre propriété que tous les rayons du système leur sont tangents. Les deux belles propriétés des surfaces des centres de courbure trouvées par Monge, savoir : 1° que leurs contours apparents se coupent à angle droit quel que soit le point de l'espace où l'on place le point de vue, 2° que les arêtes de rebroussement des surfaces développables formées par les normales sont des lignes géodésiques sur les surfaces des centres de courbure, sont des propriétés spéciales aux systèmes de normales à une surface. Elles n'appartiennent ni aux surfaces des points limites, ni aux surfaces focales des systèmes généraux.

Les deux systèmes de lignes de courbure des surfaces considérées comme les lieux géométriques des points des surfaces dont les normales forment des surfaces développables, correspondent dans le système le plus général aux deux séries de surfaces développables Ω_1 et Ω_2 (§ V). D'un autre côté, on peut regarder les surfaces réglées O_1 et O_2 comme correspondant aussi aux lignes de courbure, car elles aussi coupent la surface suivant des lignes de cour-

bure dans le cas où tous les rayons du système sont normaux à cette surface.

Les ombilics des surfaces, pour lesquels les deux rayons de courbure principaux sont égaux, de sorte que toutes les normales infiniment voisines passent par le même point et que la direction des plans normaux principaux devient indéterminée, correspondent aux rayons principaux qui sont tels, que tous leurs rayons infiniment voisins les coupent en un même point et dont les plans principaux aussi bien que les plans focaux ont une direction indéterminée.

Le théorème d'Euler qui montre comment le rayon de courbure d'une section normale est déterminé par l'angle de cette section avec l'une des sections principales et les deux rayons de courbure principaux, se trouve comme cas particulier dans la formule (18) (§ VII). Cette formule devient la formule d'Euler si on y fait

$$\beta = \frac{\varpi}{2}, \quad r_1 = \rho_1, \quad r_2 = \rho_2.$$

La méthode générale exposée (§ VII) détermine aussi le rayon de courbure d'une manière nouvelle qui n'est pas dénuée d'intérêt. Elle montre que l'angle de déviation du rayon de courbure d'une section normale en point donné avec une normale issue d'un point de la surface situé dans le plan de la section et infiniment voisin du point donné est toujours égal à un droit, c'est-à-dire que :

Si par deux points infiniment voisins d'une surface on mène les deux normales et que sur ces normales on prenne les deux longueurs pour lesquelles l'angle de déviation est égal à un droit, ces longueurs représentent les rayons de courbure aux deux points infiniment voisins pour la section normale qui passe par ces points.

La mesure de la courbure donnée par Gauss se retrouve

dans la théorie générale dans la mesure de la densité. Son expression, qui est la réciproque du produit des deux rayons de courbure principaux, se trouve dans l'expression (§ VI) de la mesure de la densité qui est la réciproque du produit de la distance des deux foyers au point considéré. Pour les systèmes de rayons normaux à une surface et par suite normaux à toutes les surfaces parallèles, la mesure de la densité est identique avec celle de la courbure, parce qu'en chaque point de l'espace la mesure de la densité des rayons est égale à la mesure de la courbure de la surface parallèle qui passe en ce point.

On voit que les considérations introduites par Gauss dans la science possèdent ce degré de généralité qui leur permet de s'étendre bien au delà du but qu'on leur avait d'abord fixé. (*Fin.*)

SUR QUATRE PRODUITS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS;

PAR M. A.-D. GUIBERT.

Le produit de 8, *de* 9, *de* 10, *de* 11 *entiers consécutifs n'est jamais un carré.*

Quand il s'agit de 8 entiers consécutifs seulement, la proposition est déjà établie (*); mais la démonstration actuelle s'applique en même temps à ce cas et aux trois autres.

Soit $n(n+1)(n+2)\ldots$ le produit proposé dont le dernier facteur est $n+7$, $n+8$, $n+9$, $n+10$, suivant que le nombre des entiers consécutifs est 8, 9, 10, 11.

(*) *Voir* le t. XIX des *Nouvelles Annales*, p. 213.

Pour abréger, nous nommerons n, $n+1$, $n+2$, etc., *les facteurs en n* de leur produit.

Nous admettons que le produit proposé, qui sera, à volonté, l'un quelconque des quatre désignés dans l'énoncé, soit un carré, et nous nous proposons de faire ressortir l'absurdité d'une telle hypothèse.

Quelques observations préalables sont nécessaires.

Les différences entre les facteurs en n prouvent que tout diviseur premier commun à deux quelconques d'entre eux est nécessairement l'un des nombres 2, 3, 5, 7.

Par conséquent, le produit proposé étant un carré, si un facteur en n est premier avec $2 \times 3 \times 5 \times 7$, il doit être un carré.

Si un facteur en n n'est divisible que par un seul des nombres 2, 3, 5, 7, il est le produit d'une certaine puissance de ce nombre par un carré, ou, ce qui revient au même, eu égard à l'exposant de cette puissance, il est un carré ou le produit d'un carré, par ce nombre pris parmi 2, 3, 5, 7.

Autre remarque : Il est impossible que le produit proposé soit un carré, lorsque deux facteurs en n sont des carrés. Cela est vrai quels que soient les rangs de ces facteurs; mais, pour notre démonstration, il suffit qu'ils appartiennent aux huit premiers. Leur différence est alors comprise entre 1 et 8.

Or la différence de deux carrés n'est jamais ni 2, ni 4, ni 6. Si elle est égale à 3, les facteurs en n sont 1 et 4; le produit proposé, dont le premier facteur est 1, n'est manifestement pas un carré; si elle est égale à 5, les facteurs correspondants sont 4 et 9, et le produit proposé dont le premier facteur est alors l'un des entiers 2, 3, 4 n'est pas non plus un carré.

Cela posé, nous allons examiner tous les cas qui peuvent se présenter.

Ier Cas. *n est premier avec $2 \times 3 \times 5 \times 7$.*

Le nombre n n'ayant aucun diviseur commun avec les entiers qui le suivent, doit être un carré. Il sera de la forme $3g + 1$, de l'une des formes $5h + 1$, $5h + 4$ et de l'une des formes $7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$.

Montrons qu'un autre des huit premiers entiers serait un carré.

Lorsque $n = 5h + 1$, $n + 6$ est premier avec 5; il est d'ailleurs premier avec 2×3; s'il est premier avec 7, il serait un carré; s'il est divisible par 7, aucun autre facteur en n n'est divisible par 7, il devrait donc être encore un carré.

Lorsque $n = 5h + 4$, $n + 4 = 5h + 8$; et comme pour $n = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, on a

$$n + 4 = 7k + 5,\ 7k + 6,\ 7k + 8,$$

il en résulte que $n + 7$, premier avec 2×3, est aussi premier avec 5×7; ce facteur en n serait donc un carré.

IIe Cas. *n divisible par un seul des nombres 2, 3, 5, 7.*

1° n divisible par 2 et premier avec $3 \times 5 \times 7$.

n est un carré ou double d'un carré.

Soit d'abord n égal à un carré : il aura la forme $3g + 1$.

$n + 7$ est premier avec 2×3, il l'est également avec 5×7; car pour $n = 5h + 1$, $5h + 4$, $n + 7 = 5h + 8$, $5h + 11$; et pour $n = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, $n + 7 = 7k + 8$, $7k + 9$, $7k + 11$; $n + 7$ serait donc un carré en même temps que n.

Soit ensuite n double d'un carré a^2, lequel sera de la forme $3g + 1$.

$n + 5$, premier avec 2×3, est évidemment premier avec 5; s'il est premier avec 7, il doit être un carré; et, de même, s'il est divisible par 7, aucun autre facteur en

n n'étant alors divisible par 7; mais, pour $a^2 = 5h + 1$, $5h + 4$, $n + 5 = 10h + 7$, $10h + 13$, formes qui ne conviennent à aucun carré.

2° n divisible par 3 et premier avec $2 \times 5 \times 7$.

n est un carré ou triple d'un carré.

Soit n égal à un carré.

Lorsque $n = 5h + 1, 5h + 4, n + 2 = 5h + 3, 5h + 6$; quand $n = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, $n + 2 = 7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 6$; ce facteur, premier avec 2×3, est ainsi premier avec 5×7; il devrait donc être un carré.

Soit n triple d'un carré a^2.

Pour $a^2 = 5h + 1$, $n + 4$, premier avec 2×3, égalant $15h + 7$, est premier avec 5; donc, s'il est premier avec 7, il devrait être un carré; et, de même, s'il est divisible par 7, aucun autre facteur en n n'étant alors divisible par 7; mais $15h + 7$ ne représente aucun carré.

Pour $a^2 = 5h + 4$, $n + 4 = 15h + 16$; ce facteur, divisible ou non par 7, doit être un carré.

Or, quand $n + 4$ est divisible par 7, $n + 2$ ne l'est pas, et comme $n + 2 = 15h + 14$, il est premier avec 5; il serait donc aussi un carré. Lorsque $n + 4$ n'est pas divisible par 7, il est de l'une des formes $7k + 1$, $7k + 2$, la forme $7k + 4$ supposant n multiple de 7 : si $n + 4 = 7k + 1$, $n + 2$, égal à $7k - 1$, devrait être un carré; si $n + 4 = 7k + 2$, $n + 1$ premier avec 3, est premier avec 5×7; il serait donc le double d'un carré; mais $n + 1 = 7k - 1$ ne correspond au double d'aucun carré.

3° n divisible par 5 est premier avec $2 \times 3 \times 7$.

n ne saurait être un carré; car, pour $n = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, le facteur $n + 4$, premier avec $2 \times 3 \times 5$, prenant les formes respectives $7k + 5$, $7k + 6$, $7k + 8$, devrait être en même temps un carré.

Soit donc n égal à 5 fois un carré, lequel sera de la forme $3g+1$.

$n+6$ est premier avec $2\times3\times5$; s'il est premier avec 7, il devrait être un carré; et de même, à cause de son rang, s'il est divisible par 7; mais $n+6$, égal à $15g+11$, n'a pas la forme d'un carré.

4° n divisible par 7 et premier avec $2\times3\times5$.

En supposant que n soit un carré, on trouve que $n+6$ ou $n+4$ serait un carré, selon que n égale $5h+1$ ou $5h+4$.

Soit n égal à 7 fois un carré a^2, lequel sera de la forme $3g+1$ et de l'une des formes $5h+1$, $5h+4$. On trouve ici que $n+6=35h+13$, $35h+34$, devrait être un carré. Or aucune de ces formes ne peut être celle d'un carré.

IIIe Cas. *n divisible par deux des nombres* 2, 3, 5, 7 *et premier avec les deux autres.*

1° n divisible par 2×3 et premier avec 5×7.

$n+5$ est premier avec $2\times3\times5$, donc, divisible ou non par 7, il doit être un carré; mais, pour

$$n+5=5h+1,\ 5h+4,$$

on a

$$n+7=5h+3,\ 5h+6;$$

donc ce dernier facteur en n devrait être aussi un carré.

2° n divisible par 2×5 et premier avec 3×7.

$n+3$ est premier avec $2\times3\times5$.

Quand $n+8$ est premier avec 7, il est un carré; et si l'on pose $n+3=3g+1$, $n+7$ devient égal à $3g+5$; donc ce facteur en n, premier avec $2\times5\times7$, est premier avec 3; par conséquent il serait un carré.

Lorsque $n+3$ est divisible par 7, si $n+3=3m+1$, le facteur $n+7=3m+8$ devrait être un carré : si

$n+3=3m+2$, $n+7$, premier avec $2\times5\times7$, est multiple de 3; mais $n+2$, égal à $3m+1$ et premier avec $3\times5\times7$, n'a pas une forme compatible avec celle du double d'un carré; donc il doit être un carré, et $n+7$ serait le triple d'un carré; or, pour $n+2=5h+1$, $n+7=5h+6$, et pour $n+2=5h+4$, $n+7=5h+9$, chacune de ces valeurs de $n+7$ ne saurait être celle du triple d'un carré.

3° n divisible par 2×7 et premier avec 3×5.

Soit d'abord $n+3$ premier avec 5; ce facteur en n sera un carré, puisqu'il est évidemment premier avec $2\times3\times7$. Mais, pour $n+3=5h+1$, $5h+4$, on a

$$n+1=5h-1,\ \ 5h+3;$$

$n+1$, premier avec $2\times3\times7$, est premier ainsi avec 5, il devrait donc être aussi un carré.

Soit ensuite $n+3$ divisible par 5 : si $n=3m+1$, $n+1$ doit être un carré, et $n+6=3m+7$, premier avec $3\times5\times7$, serait le double d'un carré; si $n=3m+2$, $n+5$, premier avec $2\times5\times7$, est premier avec 3; ce facteur en n devrait être un carré, ce qui est impossible; car, d'après l'hypothèse, $n+5$ est un multiple de 5 plus 2.

4° n divisible par 3×5 et premier avec 2×7.

$n+2$ et $n+6$ sont premiers avec $2\times3\times5$.

Si aucun de ces facteurs en n n'était divisible par 7, ils seraient des carrés.

Si $n+2=7m$, $n+4$ est un carré; $n+1=7m-1$, premier avec $3\times5\times7$, devrait être le double d'un carré.

Si $n+4=7m$, $n+1$ est un carré, et $n+7=7m+3$ devrait être double d'un carré.

5° n divisible par 3×7 et premier avec 2×5.

Les facteurs $n+3$, $n+4$ sont premiers avec

$2 \times 3 \times 7$: si ni l'un ni l'autre n'était divisible par 5, ils seraient tous deux des carrés.

Lorsque $n + 2 = 5m$, $n + 4 = 5m + 2$; ce dernier facteur en n devrait être un carré.

Quand $n + 4 = 5m$, $n + 2$, égal à $5m - 2$, serait un carré.

6° n divisible par 5×7 et premier avec 2×3.

$n + 6$, premier avec $2 \times 3 \times 5 \times 7$, doit être un carré.

Si $n = 3m + 1$, le facteur $n + 4$ serait un carré ; si $n = 3m + 2$, $n + 2$ devrait être un carré.

IVe Cas. *n divisible par trois des nombres* 2, 3, 5, 7 *et premier avec le quatrième.*

1° n divisible par $2 \times 3 \times 5$ et premier avec 7.

$n + 7$ étant premier avec $2 \times 3 \times 5$ doit être un carré, mais, pour $n + 7 = 7k + 1$, $7k + 2$, $7k + 4$, on a $n + 1 = 7k - 5$, $7k - 4$, $7k - 2$; ce dernier facteur en n est ainsi premier avec 7, il l'est d'ailleurs avec $2 \times 3 \times 5$, donc il serait aussi un carré.

2° n divisible par $2 \times 3 \times 7$ et premier avec 5.

$n + 5$ doit être un carré.

Si $n + 5 = 5h + 1$, $n + 1$, égal à $5h - 3$, est premier avec 5, il serait donc un carré : si $n + 5 = 5h + 4$, $n + 2$, premier avec 3×7, est aussi premier avec 5 ; il devrait donc être le double d'un carré, ce qui est impossible d'après sa valeur $5h + 7$.

3° n divisible par $2 \times 5 \times 7$ et premier avec 3.

$n + 3$ est un carré de la forme $3g + 1$; $n + 1$ serait un carré.

4° n divisible par $3 \times 5 \times 7$ et premier avec 2.

Les facteurs $n + 2$, $n + 4$ devraient être des carrés.

Ve Cas. *n divisible par* $2 \times 3 \times 5 \times 7$.

$n + 1$ est un carré ; $n + 4 = 5h + 4$ serait le double d'un carré.

La propriété objet de cette Note est ainsi établie.

On verrait semblablement que le produit de 12, de 13 entiers consécutifs n'est point un carré. Les nombres premiers à considérer seraient 2, 3, 5, 7 et 11. Pareille propriété se prouverait pour le produit de 14, de 15, de 16 et de 17 entiers consécutifs. Ces quatre cas se rapportent aux nombres premiers 2, 3, 5, 7, 9, 11 et 13. On peut continuer ainsi, en liant entre eux plusieurs cas, mais la démonstration devient de plus en plus pénible.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME SUR LES COURBES PLANES DE M. STREBOR

(voir t. XIX, p. 33);

PAR M. JOSEPH SACCHI,
Professeur au lycée de Porte-Neuve, à Milan.

Soient : M_1 un point quelconque d'une courbe donnée (*); ν_1 et p_1 le rayon vecteur OM_1 et la perpendiculaire OP_1 à la droite M_1P_1, touchant la courbe en M_1; ω_1 et α_1 les angles que les ν_1 et p_1 forment avec une droite fixe OA. Sur le prolongement de OM_1 on prend $M_1N = \nu_1$, le lieu des points N sera une courbe semblable à la courbe donnée; par conséquent l'angle β que la normale NM à cette seconde courbe forme avec ON sera égal à celui des droites ν_1 et p_1, c'est-à-dire on aura $\beta = \alpha_1 - \omega_1$. Sur la normale NM que l'on prenne $NM = OM$, alors MM_1 est perpendiculaire sur OM_1. On doit prouver que la courbe lieu des points M est l'enveloppe des perpendiculaires qu'on mène aux extrémités des rayons vecteurs

(*) On prie de faire la figure.

de la courbe donnée; ou bien que la courbe donnée est la podaire de celle des points M.

En nommant ν, p, ω, les quantités relatives au point M et analogues à ν_1, p_1, ω_1, les triangles rectangles OM_1M, OP_1M_1 donnent

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \frac{\nu_1}{\nu}, \quad \cos(\alpha_1 - \omega_1) = \frac{p_1}{\nu_1},$$

et, ayant $MO = MN$, on aura

$$\omega_1 - \omega = \beta = \alpha_1 - \omega_1,$$

desquelles on déduit

$$(1) \qquad \omega = 2\omega_1 - \alpha_1, \quad \nu = \frac{\nu_1^2}{p_1},$$

relations qui montrent que la courbe donnée est la podaire de la courbe lieu des points M.

En faisant la dérivée par rapport à ω_1 des équations (1), et en la désignant par un accent, en posant

$$r^2 - p^2 = q^2, \quad \nu_1^2 - p_1^2 = q_1^2,$$

et eu égard aux formules connues

$$\alpha'_1 = \frac{p'_1}{q_1}, \quad \omega' = \frac{p\nu'}{q\nu}, \quad 1 = \frac{p_1\nu'_1}{q_1\nu_1},$$

on obtient $p = \nu_1$, laquelle avec la seconde des équations (1) donne

$$\nu_1 = p. \quad p_1 = \frac{p^2}{\nu}.$$

En remplaçant, dans l'équation

$$\varphi(p_1, \nu_1) = 0$$

d'une courbe donnée, les p_1, ν_1, par ces dernières valeurs, on a l'équation de la courbe enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs de la première courbe.

SOLUTION DE LA QUESTION 426

(voir t. XVII, p. 33);

PAR M. RASSICOD.

Le lieu du point P est une conique. Car ce point est donné par l'intersection de deux droites BN et CM passant par deux points fixes B et C, et dont le mouvement est réglé de telle sorte, qu'à une position BN de l'une en corresponde *sans ambiguïté une et une seule de l'autre* MC (*), ce qu'il est facile de voir ici. Le lieu de leur intersection est donc au plus du second degré. De plus ce n'est pas une droite; car B et C sont deux points du lieu (le point C correspond à la position de la droite AN qui passe par le point O, et le point B à celle de la droite AM qui est parallèle à BC), et les trois points B, P, C ne sauraient être en ligne droite. Le lieu du point P est donc une conique.

La même démonstration s'appliquerait identiquement au point P.

On voit de plus que ceci aura lieu quel que soit l'angle MAN, pourvu qu'il soit constant. Quant aux points T et T_1, ils décrivent la polaire du point A par rapport à l'angle BOM.

(*) Je n'ai pas cru qu'il fût nécessaire de rappeler ici la démonstration d'un théorème connu.

SUR LES INTERSECTIONS DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES;

D'APRÈS LE RÉV. SALMON (*).

Théorème I. — Par $\frac{n(n+3)}{2}$ points fixes on peut décrire une courbe de degré n et une seule, généralement parlant. Si parmi ces $\frac{n(n+3)}{1.2}$ points il s'en trouve un nombre plus grand que $pn - \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ sur une courbe de degré p, où $p < n$, alors il est impossible de faire passer une courbe de degré n par ces $\frac{n(n+3)}{2}$ points.

Théorème II. — Toutes les courbes du $n^{ième}$ degré qui passent par $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points fixes, passent aussi par $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ autres points fixes.

Théorème III. — Un polygone de $2n$ côtés étant inscrit dans une conique, les $n(n-2)$ points d'intersection des côtés impairs avec les côtés pairs non adjacents sont sur une courbe de degré $n-2$.

Théorème IV. — Si parmi les n^2 points d'intersection de deux courbes de degré n, il s'en trouve np sur une

(*) Ces théorèmes ont déjà été démontrés dans les *Nouvelles Annales*. Nous les récapitulons dans l'intérêt des élèves.

courbe de degré $p < n$, les $n^2 - np$ points d'intersection restants sont sur une courbe de degré $n - p$.

Théorème V. — Une courbe du $n^{ième}$ degré qui passe par $np - \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ points d'une courbe de degré $p < n$, rencontre encore cette courbe en $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ points.

Théorème VI. — Deux courbes de degré m et n se coupant en mn points, une courbe de degré r qui passe par $\frac{(m+n-r-1)(m+n-r-2)}{1.2}$ de ces points, où r est supérieur à m ou à n, mais non supérieur à $m+n-3$, passe aussi par les points restants des mn points.

Note historique. — Euler paraît être le premier qui ait signalé le paradoxe de deux courbes du $n^{ième}$ degré qui passent par un nombre plus grand de points qu'il n'est nécessaire pour déterminer une telle courbe (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1748); la même difficulté a été énoncée par Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes*, 1750. Toutefois les importants théorèmes qui découlent de ce paradoxe sont d'une date très-récente; ainsi le théorème IV est de Gergonne (*Annales*, t. XVII, p. 220; 1827); le théorème II, aussi de 1827, appartient à M. Plücker (*Entwickelungen*, vol. I, p. 228, et *Gergonne Annal.*, vol. XIX, pp. 97, 129); le théorème V est le sujet de deux Mémoires envoyés en même temps à Crelle, l'un par Jacobi (t. XV, p. 285), un autre par Plücker (t. XVI, p. 47); le théorème VI, le plus général, est de M. Cayley (*Cambridge Mathematical Journal*, t. III, p. 211).

SOLUTION COMPLÈTE DE LA QUESTION 456

(voir t. XVII, p. 65);

PAR M. R. ALBARET,
Élève du lycée Saint-Louis.

Il s'agit de mener dans un plan donné par ses deux traces une droite dont les deux projections ne forment qu'une seule et même droite.

On donne pour solution l'intersection du plan donné par un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Il est évident qu'en outre il y a encore l'intersection du plan donné avec le plan bissecteur de l'angle dièdre formé par la partie postérieure du plan horizontal et la partie inférieure du plan vertical.

SÉRIE HOMOGRAPHIQUE.

Lemme. — Soient a_1, a_2, a_3, ..., a_{2p}, etc., une série de termes telle, que dans quatre termes consécutifs la somme des extrêmes surpasse la somme des moyens de la quantité constante n.

Termes généraux.

$$a_{2n} = (n - 1)(a_3 - a_1) + a_2 + 2^{n-2}k,$$
$$a_{2n+1} = n(a_3 - a_1) + a_1 + 2^{n-1}k,$$

faciles à trouver.

Corollaire. p termes quelconques étant liés par une équation linéaire, on calcule facilement les termes généraux, par la théorie des séries récurrentes.

Termes sommatoires.

Soit la série a_2, a_4, a_6, ..., a_{2n}, et S_{2n} le terme sommatoire

$$S_{2n} = \frac{n(n-1)}{2}(a_3 - a_1) + na_2 + 4^{n-2}k,$$

$$S_{2n+1} = \frac{n(n-1)}{2}(a_3 - a_1) + na_1 + 2.4^{n-2},k.$$

Somme totale :

$$n(n-1)(a_3 - a_1)\,n(a_2 + a_1) + 3.\,4^{n-2}k.$$

Soient a_1, a_2, a_3, ..., les trois premiers termes d'une série telle, que dans les termes consécutifs le produit des extrêmes divisé par le produit des moyens donne un quotient constant log k.

Faisons

$$a_1 = e^{x_1}, \quad a_2 = e^{x_2}, \ldots, \quad a_p = e^{x_p}, \ldots,$$

la solution énoncée s'écrira ainsi :

$$e^{x_{p_1} + x_{p_4} - x_{p_2} - x_{p_3}} = \log k,$$

d'où

$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = k.$$

D'après le lemme

$$x_{2n} = (n-1)(x_3 - x_1) + x_2 + 2^{n-2}k,$$
$$x_{2n+1} = n(x_3 - x_1) + x_1 + 2^{n-1}k,$$
$$x_{2n+2} = n(x_3 - x_1) + x_2 + 2^{n}k,$$
$$x_{2n+3} = (n+1)(x_3 - x_1) + x_1 + 2^{n+1}k,$$

on a

$$x_{2n} = \frac{x_{2n+1} \cdot x_{2n+2} + k}{x_{2n+3}}.$$

Substituant les valeurs de x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+3}, on aura x_{2n}

8.

en fonction de x_3, x_1, x_2,

$$e^{x_{2n}} = e^{(n-1)(x_3-x_1)+x_1+2^{n-2}k},$$

Prenant les logarithmes, on a

$$a_{2n} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{n-1} . a_1 . 2^{n-2} k,$$

$$a_{2n+1} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{n} . a_1 . 2^{n-1} k.$$

Donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3,..., 4, on trouve sans difficulté le terme sommatoire.

Remarque. — Il est évident que cette méthode s'applique à une relation qui comprend un multiple quelconque de rapports. Le plus simple est le produit binaire autrement dit anharmonique.

A chaque relation correspond une propriété géométrique, correspondance que M. Chasles a brillamment établie pour le rapport binaire (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 609

(voir p. 31);

PAR M. PAUL G. DE SAINT-MICHEL,
Elève de l'école des Carmes (classe de M. Dardenne).

Je conserve les notations de l'énoncé. Soit maintenant RD la troisième hauteur du triangle RFF'; dans le qua-

(*) Nos deux illustres géomètres devraient publier une nouvelle édition beaucoup raccourcie de ces codes de la nouvelle géométrie, créations glorieuses de la France. Ils augmenteraient considérablement le nombre des lecteurs. La vie de chacun est aujourd'hui tellement absorbée, qu'il faut attacher des locomotives aux œuvres scientifiques. La *Theoria motus corporum cœlestium* ne contient que 227 pages in-4, et les *Disquisitiones*, chef-d'œuvre des chefs-d'œuvre, environ 500 pages in-8.

drilatère complet RF′HF, la diagonale FF′ est partagée harmoniquement par les deux autres aux points C et D; donc par une propriété connue des conjuguées harmoniques, on a

$$(1) \qquad MF^2 = MC \times MD.$$

Soit C′ un point tel, que C′D = DM; je vais démontrer que ce point appartient à la circonférence HCR. Sur FF′ comme diamètre je décris une demi-circonférence qui coupe RD en V; le triangle rectangle MVD donne

$$(2) \qquad MF^2 = VD^2 + MD^2.$$

Des égalités (1) et (2) on tire

$$MC \times MD = VD^2 + MD^2$$

ou

$$DM(MC - MD) = MD \times CD = VD^2;$$

mais

$$VD^2 = DF \times DF';$$

donc

$$DF \times DF' = DC \times MD;$$

et, puisque MD = DC′,

$$DF \times DF' = DC \times DC';$$

les triangles FHD, F′RD, sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires et donnent

$$FD \times DF' = RD \times DH;$$

on a donc

$$RD \times DH = DC \times DC';$$

par suite le point C′ appartient à la circonférence RHC;

on en déduit

$$MT^2 = MC \times MC' = MC(MD + DC')$$

ou

$$MT^2 = MC \times 2MD;$$

et comme $MC \times MD = MF^2$, $MT^2 = 2MF^2$,

$$MT = MF\sqrt{2} = \frac{FF'\sqrt{2}}{2} = \text{constante}.$$

C. Q F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 601

(voir t. XX, p. 400);

PAR M. MOGNI,
Professeur à Tortone,

ET M. H. DELORME.

Le produit $(p+2)(p+3)\ldots(p+q)$ est divisible par $1.2.3\ldots q$ lorsque $p+1$ est premier avec q et il n'est pas divisible dans le cas contraire. (CATALAN.)

On sait que $(p+1)(p+2)\ldots(p+q)$ est divisible par $1.2.3\ldots q$, et que $(p+2)(p+3)\ldots(p+q)$ est divisible par $1.2\ldots(q-1)$. Posons

$$\frac{(p+2)(p+3)\ldots(p+q)}{1.2\ldots q} = A;$$

on aura

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}{1.2.3\ldots q} = \frac{(p+1)A}{q};$$

la division devant se faire exactement, A étant un nombre

entier lorsque q est premier avec $(p+1)$, q doit diviser A; donc, etc.

Dans le cas contraire on ne saurait rien affirmer, parce que le théorème en question paraît en défaut dans quelques cas, par exemple :

$$\frac{5.6.7.8.9}{2.3.4.5.6} = 3.7; \quad \frac{9.10.11.12.13.14.15.16.17}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 11.17.$$

Dans le premier cas $p = 3$, $p+1 = 4$, qui n'est premier avec $q = 6$.

Dans le second cas $p = 7$, $p+1 = 8$, qui n'est pas premier avec $q = 10$.

THÉORIE DES DIAMÈTRES RECTILIGNES ET CURVILIGNES

D'APRÈS LE RÉV. SALMON.

(*Higher Plane Curves*, page 48.)

1. *Lemme.* $U = \varphi(x, y)$:

$$\varphi(x+x', y+y') = U' + \left(x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dy}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dy}\right)^3 + \ldots.$$

En développant, il faut changer $\left(\frac{dU}{dx}\right)^p$ en $\left(\frac{d^pU}{dx^p}\right)$, $\left(\frac{dU}{dx}\right)^p\left(\frac{dU}{dx}\right)^q$ en $\frac{d^{p+q}U}{dx^{p+q}}$, etc.

2. L'équation polaire d'une courbe donnée par une équation de degré n en x, y s'obtient en remplaçant x, y par $\rho\cos\theta$, $\rho\sin\theta$ (pour des axes rectangulaires, ou

par m, n pour des axes quelconques) et l'on obtient

$$A\rho^n + A_1\rho^{n-1} + A_2\rho^{n-2} + \ldots + A_n = 0;$$

les A sont des fonctions de $\sin\theta$, $\cos\theta$; $\frac{A_1}{A}$ est la somme des distances à l'origine de ces intersections de la corde faisant un angle θ avec l'axe des x; $\frac{A_2}{A}$ la somme de ces mêmes distances prises deux à deux, etc. (Albert Girard).

3. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_p + \ldots + u_0,$$

u_p est une fonction homogène de degré p en x, y.

Si l'on transporte l'origine au point x', y', l'on obtient

$$U + \left(x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(x'\frac{dU}{dy} + y'\frac{dU}{dy}\right)^2 + \ldots.$$

Si l'on passe aux coordonnées polaires, le coefficient de ρ^{n-1} s'obtient en substituant $\cos\theta$, $\sin\theta$, au lieu de x, y dans u_{n-1} et dans $x'\frac{du_n}{dx} + y'\frac{du_n}{dy}$.

Le coefficient ρ^{n-2} s'obtient en faisant les mêmes substitutions dans u_{n-2}.

4. *Diamètre du premier degré.* — Étant donnée une corde faisant avec l'axe des x un angle θ, le lieu du point dont la somme des distances aux n points d'intersection est nulle est donné par l'équation

$$x\frac{du_n}{dx} + y\frac{du_n}{dy} + u_{n-1} = 0, \qquad (\textit{Voir n° 3.})$$

équation d'une droite (Newton).

Diamètre du deuxième degré. — Même donnée; le

lieu du point dont la somme des distances prises deux à deux est nulle, est donné par l'équation

$$u_{n-2} + x\frac{du_{n-1}}{dx} + y\frac{du_{n-1}}{dy}$$

$$+\frac{1}{2}\left[x^2\frac{d^2u_n}{dx^2} + 2xy\frac{d^2u_n}{dxdy} + y^2\frac{d^2u_n}{dy^2}\right] = 0,$$

équation d'une conique.

Et de même pour les diamètres d'un degré plus élevé.

5. *Conique diamétrale.* — C'est le lieu des points milieux des cordes parallèles. Soit M un point de la courbe et y_1 son ordonnée; N un point correspondant de la conique diamétrale et y son ordonnée; MN distance du point de la conique au point de la courbe $y - y_1$, $y - y_2$, etc. On a par définition

$$\Sigma(y - y_1)(y - y_2) = 0,$$

ou bien

$$\frac{n(n-1)}{2}y^2 - (n-1)y\,\Sigma y_1 + \Sigma y_1 y_2 = 0.$$

1° Le produit des deux racines est $\frac{2\Sigma y_1 y_2}{n(n-1)}$.

Ainsi le produit des deux distances de l'origine aux deux points de la conique est égale à la moyenne des produits des distances de l'origine à la courbe prises deux à deux.

2° La somme des deux racines est $\frac{2\Sigma y_1}{n}$; la moyenne pour la courbe est $\frac{\Sigma y_1}{n}$ pour un point de la conique, et par conséquent $\frac{2\Sigma y_1}{n}$ pour les deux points; les deux moyennes donnent le même point; donc la conique et la courbe ont le même diamètre rectiligne.

6. *Cubique diamétrale.* — Même désignation que ci-dessus ; on aura

$$\Sigma(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^3$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}y^2\Sigma y+\frac{n-2}{1}y\Sigma y_1y_2-\Sigma y_1y_2y_3.$$

On conclut alors que la courbe et la cubique ont le même diamètre ; car la moyenne pour un point de la cubique est $\frac{\Sigma y_1}{n}$ et pour les trois points $\frac{3\Sigma y_1}{n}$.

Centres.

Ce mot est pris dans une double acception.

Lorsque dans l'équation polaire de degré n les termes du degré $n-1$ manquent, le pôle peut prendre le nom de centre.

Lorsque l'équation ne contient que des puissances paires du rayon vecteur, alors le pôle est un centre dans le sens le plus général. Si l'équation en x, y est de degré pair, pour que l'origine soit un centre, dans le sens général, l'équation rendue polaire doit avoir la forme

$$u_0+u_2+u_4+\ldots=0;$$

les indices indiquent les puissances du rayon vecteur.

Et si l'équation en x, y est de degré impair, elle ne doit contenir que des puissances impaires de la variable ; par conséquent le centre est sur la courbe, puisque l'équation est satisfaite par $x=y=0$; rendue à la forme polaire, elle sera divisible par le rayon vecteur et ne contiendra plus que des puissances paires de ce rayon vecteur.

NOTE SUR LES RAYONS DE COURBURE;

PAR M. MANNHEIM.

Une transversale passe par un point fixe O et rencontre en $A, A_1, A_2, \ldots$ des courbes données $(A), (A_1), (A_2), \ldots$; on prend sur cette droite un point M, tel que l'on ait

$$\frac{\lambda}{OA} + \frac{\lambda_1}{OA_1} + \frac{\lambda_2}{OA_2} + \ldots = \frac{\mu}{OM},$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu$ étant des constantes; lorsque la transversale tourne autour du point O, le point M décrit une courbe (M) et l'on a

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{\rho \cos^3 \alpha} + \frac{\lambda_1}{\rho_1 \cos^3 \alpha_1} + \frac{\lambda_2}{\rho_2 \cos^3 \alpha_2} + \ldots = \frac{\mu}{R \cos^3 \varphi},$$

ρ est le rayon de courbure de (A) au point A et α l'angle de ce rayon et de la transversale, de même pour $\rho_1, \alpha_1, \ldots$, et enfin pour R et φ relativement à M (*).

Si $A, A_1, \ldots$ sont tous les points d'intersection d'une transversale issue du point O avec une même courbe d'ordre m et que l'on pose

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots = \frac{m}{OM},$$

d'après le théorème de Cotes, lorsque la transversale tourne autour de O, le point M décrit une ligne droite et

(*) M. Mannheim n'ayant pas fait connaître ici comment il est arrivé à la relation (1), nous insérerons les démonstrations de cette relation qu'on voudra bien nous envoyer.

la relation (1) devient simplement

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho\cos^3\alpha}+\frac{1}{\rho_1\cos^3\alpha_1}+\frac{1}{\rho_2\cos^3\alpha_2}+\ldots=0.$$

Cette formule étant indépendante de la position du point O, est vraie pour une transversale arbitraire qui coupe une courbe algébrique d'ordre quelconque. On peut la déduire d'une belle relation due à M. Liouville (voir *Journal de Mathématiques*, t. VI, p. 411).

La formule (2) conduit à des conséquences intéressantes, parmi lesquelles on peut citer la suivante :

En deux points quelconques A, A_1 d'une courbe quelconque du second ordre les rayons de courbure sont entre eux comme les cubes des tangentes AT, A_1T, issues de ces points et limitées au point T où ces tangentes se coupent (*).

Si l'on n'a que deux courbes (A), (A_1), le point M étant déterminé par la relation

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA_1}=\frac{2}{OM},$$

en appliquant la relation (1) on a

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho\cos^3\alpha}+\frac{1}{\rho_1\cos^3\alpha_1}=\frac{2}{R\cos^3\varphi}.$$

Le point M est dans ce cas l'harmonique conjugué de O par rapport à A et A_1. Lorsque le point O est à l'infini,

(*) M. Peaucellier a retrouvé dernièrement ce théorème (*Nouvelles Annales*, t. XX, p. 429); je l'avais aussi rencontré (*Annales de Tortolini*, t. II, p. 212) après MM. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 350) et Umpfenbach (*Journal de Crelle*, t. XXX, p. 95). On y est aussi conduit par la transformation par polaires réciproques; la démonstration directe de ce théorème est du reste très-simple.

les transversales issues de ce point sont parallèles entre elles, la courbe (M) est alors une ligne diamétrale et l'on a toujours la relation (3).

En combinant les relations (2) et (3), on peut arriver à de nombreuses conséquences. En voici une :

On coupe une courbe du troisième ordre par une transversale A, A_1, A_2, on prend le milieu M de la corde AA_1, ce point fait partie d'une ligne diamétrale (M) correspondant à la direction fixe AA_1 ; si l'on décrit une conique osculatrice à la courbe donnée en A_2 et tangente à (M) en M, le rayon de courbure de cette conique en M est la moitié du rayon de courbure de la ligne diamétrale au même point.

Au lieu de faire intervenir une conique osculatrice, on peut, au moyen de (2) et de (3), établir une relation très-simple entre le rayon de courbure de (M) en M et le rayon de courbure de la courbe donnée en A_2.

QUESTIONS.

612. On donne sur le même plan deux circonférences O, O' et un point fixe P, on décrit des circonférences passant par P et tangentes à O, l'on prend les axes radicaux de ces circonférences et de O'; on demande l'enveloppe de ces droites. Déterminer *directement* le point de contact de chaque axe radical avec cette enveloppe.

(MANNHEIM.)

613. On donne une conique et un point fixe O dans son plan. Du point O on mène deux droites OA, OB perpendiculaires entre elles qui coupent la conique en A et

B. On joint le point A au point B et l'on mène en chacun de ces points les tangentes AT, BT à la conique; on projette le point O sur les trois côtés du triangle ABT, par les trois points ainsi obtenus on fait passer une circonférence. Pour chacune des positions de l'angle droit, on obtient ainsi une circonférence; démontrer que toutes ces circonférences sont tangentes à une même circonférence. (MANNHEIM.)

614. Désignons par F le foyer d'une ellipse donnée. En un point quelconque M de cette courbe menons la tangente MT qui coupe le petit axe en T, soit Q la projection du point T sur le rayon vecteur MF; on demande le lieu des points tels que Q, lorsque M décrit l'ellipse donnée. (MANNHEIM.)

THÉORÈME SUR LES SÉRIES;

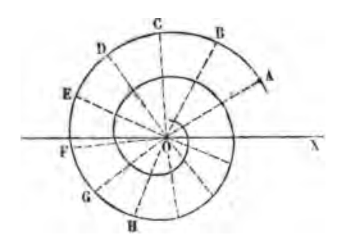
PAR M. H. LAURENT,
Élève de l'École Polytechnique (*).

Je prends la liberté de vous envoyer la démonstration d'un théorème assez singulier sur les séries, théorème que j'ai trouvé en étudiant les propriétés des spirales. Je ne sais si ce théorème est déjà connu, mais à coup sûr la démonstration que je vais vous donner ne l'est pas. Elle vous semblera sans doute singulière et même pis, mais je la donne telle qu'elle s'est présentée à moi.

Considérons une spirale ayant un point asymptotique

(*) Fils du célèbre chimiste philosophe si prématurément perdu pour la science. Né à la Folie, près Langres, le 14 novembre 1807, mort à Paris le 15 avril 1853.

en O, supposons que le rayon vecteur de la spirale aille



en décroissant quand l'angle de ce rayon avec l'axe OX croît; menons une série de rayons vecteurs OA, OB, OC,... faisant avec l'axe OX des angles θ, 2θ, $3\theta, \ldots, n\theta, \ldots$; soient $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ les longueurs de ces rayons. Par un point O du plan de la spirale, menons une droite oa égale et de même sens OA, par le point a une droite égale à OB et de même sens que OB, etc.; nous formerons ainsi une espèce de polygone spiral dont les côtés seront asymptotiques à un certain point Ω.

En effet, considérons deux côtés consécutifs bc et cd du polygone spiral, prolongeons cd d'une longueur dd' telle que $cd' = bc$; le cercle passant en b, c, d' contiendra dans son intérieur tous les côtés du polygone spiral qui suivent bc, car il serait circonscrit à ce polygone si on lui supposait tous ses côtés égaux à bc, or à mesure que les côtés du polygone spiral vont en diminuant, le cercle qui passe par les extrémités d'un côté et le point obtenu en prolongeant le côté suivant d'une quantité qui le rend égal au premier, va aussi en diminuant; tout en restant intérieur au cercle qui passe en b, c, d, ce cercle finit par se réduire à son centre qui sera le point Ω.

Il résulte de là que les droites ob, oc, $od, \ldots$ tendent vers une position limite $o\Omega$. Projetons alors le contour $abc \ldots g$, sur l'axe OX, nous aurons

$$r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta = \overline{og} \cos(\overline{og}, o\mathrm{X}),$$

et, en passant aux limites,

$$r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta + \ldots = \overline{o\Omega} \cos(\overline{o\Omega}, \overline{\text{OX}})\cdot$$

En projetant sur une droite perpendiculaire à OX on aurait trouvé

$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots + r_n \sin n\theta \ldots = \overline{o\Omega} \sin(\overline{o\Omega}, \overline{\text{OX}}).$$

Ces résultats sont inexacts quand l'angle θ est un multiple de π, car les cercles dont j'ai parlé ont des rayons infinis. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \ldots$ *sont des nombres indéfiniment décroissants, les séries*

$$r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots,$$

$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots,$$

sont convergentes.

1° Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve un théorème connu.

2° Si l'on prend une spirale hyperbolique et si l'on mène des rayons vecteurs angulairement équidistants le polygone spiral de tout à l'heure va nous fournir les deux séries convergentes

$$\frac{1}{\theta} \sin\theta + \frac{1}{2\theta} \sin 2\theta + \ldots,$$

$$\frac{1}{\theta} \cos\theta + \frac{1}{2\theta} \cos 2\theta + \ldots,$$

ou

$$\sin\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta \ldots,$$

$$\cos\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \ldots.$$

Je vous avouerai, Monsieur, que lorsque j'ai trouvé le

théorème précédent je ne le cherchais pas : la marche que j'ai suivie le montre assez ; ensuite je vous dirai aussi que c'est en appliquant la théorie des imaginaires de M. Mourey et non en projetant le polygone spiral que je suis arrivé. C'est ainsi que je démontrais la convergence de la série

$$r_1(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + r_2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots.$$

Je n'ai pas voulu vous donner la démonstration telle que je l'avais trouvée : les idées de M. Mourey n'étant pas goûtées de tout le monde, j'aurais pu sembler par trop excentrique.

Il y a une chose qui aurait besoin, je crois, d'être éclaircie. Lorsque l'on a égalité entre deux séries convergentes

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \ldots = b_0 + b_1 x + \ldots b_n x^n + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre o et α ou entre $-\alpha$ et $+\beta$, α et β étant positifs, Cauchy démontre dans son Analyse algébrique que l'on a en général $a_n = b_n$. En est-il encore ainsi quand les deux séries précédentes ne sont égales que lorsque x varie de $+\alpha$ à $+\beta$? Ceci revient à démontrer que si une série telle que

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

est nulle pour toutes les valeurs de x comprises entre les deux nombres positifs α et β, elle est identiquement nulle, c'est-à-dire que $A_0 = 0$, $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$. Ces questions me semblent d'une haute importance.

Monsieur,

Dans une Note insérée page 435 du numéro de Novembre de votre Journal, je lis :

« 3° La formule Lemonnier (p. 197) se trouve dans le » *Traité des Différences* de Lacroix. »

Je suis étonné de cette rectification, car rien, il me semble, ne pouvait y donner lieu dans l'article que je vous ai adressé en Mars dernier et que vous avez bien voulu insérer dans le Cahier du mois de Mai, p. 197 et suivantes.

Il y a dans cet article deux formules distinctes. Je ne me suis nullement attribué l'invention de la première, puisque je commence par dire :

« Dans le grand ouvrage de Lacroix, t. III, § 940, » p. 73, se trouve pour le calcul de $\delta^n u_0$ la formule

$$\delta^n u_0 = [(1+\Delta)^z - 1]^n u_0$$

» z étant le rapport $\frac{k}{h}$. »

Je n'ai eu là pour objet, et je le dis, que d'en présenter une démonstration qui fût à la portée des élèves de Mathématiques spéciales.

H. Lemonnier,
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée de Lyon.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE D'UNE QUESTION DE PROBABILITÉS;

PAR M. R. BLAZEJARSKI.

Si l'on a des nombres h_1, h_2, h_3,... (par exemple, les chiffres des tables de mortalité) déduits d'un nombre très-grand d'observations, et si l'on répète les mêmes observations sur un nombre plus limité de faits (par exemple, les chiffres l_1, l_2,..., de défunts d'une compagnie d'assurance), on attend avec probabilités P_1, P_2,... que ces nombres seront $L_1 + l_1$, $L_2 + l_2$,..., aux écarts l_1, l_2,... *Trouver la probabilité que la somme* $L_1 + L_2 + L_3 + \ldots$ *aura un écart* l.

Pour simplifier, prenons deux valeurs seulement L_1, L_2. Les probabilités des écarts l_1, l_2 sont $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2} dx_1$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_2^2} dx_2$, où $x_1 = \frac{l_1}{A_1}$, $x_2 = \frac{l_2}{A_2}$ (A_1, A_2 ce sont les modules de convergence). Trouver la probabilité que $l_1 + l_2$ aura la valeur l, c'est-à-dire

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = l. \tag{1}$$

Cette probabilité sera la somme

$$\mathrm{S}\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2} dx_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_2^2} dx_2,$$

avec la condition que tous les groupes de valeurs x_1, x_2 doivent satisfaire l'équation (1). Pour cela, si l'on prend pour x_1 des valeurs arbitraires depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, pour x_2 on doit prendre la valeur $\frac{l - A_1 x_1}{A_2}$, et la somme

sera

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{dx_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2-\left(\frac{l-A_1x_1}{A_2}\right)^2} dx_1 \\ &= \frac{dx_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{A_2^2}[x_1(A_1^2+A_2^2)-2A_1lx_1+l^2]} dx_1 \\ &= \frac{A_2dx_2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{\frac{l^2}{A_1^2+A_2^2}}}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}}. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir la valeur de A_2dx_2, remarquons que x_1 et x_2 sont indépendants l'un de l'autre (comme dans les compagnies d'assurance le nombre de défunts d'un âge quelconque est indépendant du nombre d'un autre âge), alors x_2 peut changer et x_1 rester invariable et on tire de l'équation (1)

$$A_2dx_2 = dl,$$

et la probabilité de la valeur l sera

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{l^2}{A_1^2+A_2^2}} \frac{dl}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}},$$

ou, si l'on pose $l = x\sqrt{A_1^2+A_2^2}$ ($\sqrt{A_1^2+A_2^2}$) — module de convergence,

$$(3)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx.$$

Si l'on a un troisième nombre L_3, dont l'écart est l_3, alors on cherchera la probabilité de la valeur l' de

$$x\sqrt{A_1^2+A_2^2} + A_3x_3 = l', \text{ etc.}$$

RÉSOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1861 (p. 26);

PAR MM. G. BARTET ET H. LÉBASTEUR,
Elèves du lycée Napoléon (classe de M. Vacquant).

Nous traitons le problème dans le cas de l'ellipse, en prenant les deux axes de la courbe pour axes coordonnés.

Soient α et β les coordonnées du point P, (x_1, y_1) étant le pôle de l'une quelconque des sécantes passant par P. Nous avons

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} + \frac{\beta y_1}{b^2} = 1, \tag{2}$$

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1). \tag{3}$$

Éliminant x_1 y_1, on obtient

$$y - \frac{b^2(x-\alpha)}{\beta x - \alpha y} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}\left(x + \frac{a^2(y-\beta)}{\beta x - \alpha y}\right);$$

transportant l'origine au point P (α, β), on a

$$(\beta x - \alpha y)(\beta y + \alpha x) + (\beta x - \alpha y)(x^2+y^2) + c^2 xy = 0;$$

donc le lieu ne dépend que de la quantité c, distance des deux foyers, ce qui démontre la deuxième partie de l'énoncé.

Tangentes en P. — La courbe passe évidemment en

P, origine des coordonnées. Cherchons le coefficient angulaire de la tangente en ce point. A cet effet nous posons $y = tx$ et nous ferons tendre x et y vers o. Nous aurons

$$t^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 - c^2}{\alpha\beta} t - 1 = 0;$$

d'où ce résultat, que les tangentes en P sont rectangulaires; donc le point P est un point double.

IIIe Question (p. 26). — La courbe cherchée est évidemment la courbe enveloppe de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la polaire.

Éliminant y_1 entre les équations (2) et (3), on a

$$\alpha c^2 x_1^2 - a^2 x_1 (c^2 + \beta y + \alpha x) + a^4 x = 0.$$

Dérivant par rapport à x_1, on a

$$x_1 = \frac{a^2 (c^2 + \beta y + \alpha x)}{2\alpha c^2},$$

d'où l'équation du lieu

$$(c^2 + \beta y + \alpha x)^2 = 4\alpha c^2 . x,$$

équation d'une parabole tangente aux deux axes à des distances

$$x = \frac{c^2}{\alpha}, \quad y = -\frac{c^2}{\beta},$$

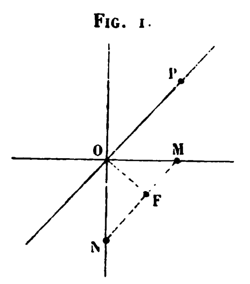
et dont la direction de l'axe est

$$\beta y + \alpha x = 0,$$

et la droite OP est évidemment la directrice. Donc les tangentes à la parabole du point P sont rectangulaires, et comme il est aisé d'avoir le foyer F, on peut construire géométriquement ces tangentes.

Les tangentes au lieu passant par le point P sont rec-

Fig. 1.



tangulaires, les tangentes à la parabole passant par le même point le sont aussi; quelle relation existe-t-il entre la direction de ces deux systèmes de tangentes?

Nous remarquons que la courbe trouvée n'est autre chose que la podaire de la parabole, le point P étant le point fixe; il en résulte que les tangentes à la courbe au point P sont perpendiculaires aux tangentes à la parabole issues du même point (*Géométrie analytique* de M. Briot, article Limaçon de Pascal), et comme ces dernières sont rectangulaires, elles coïncident avec elles.

Ainsi les tangentes en P à la courbe sont rectangulaires, fait que le calcul nous avait donné.

Points remarquables. — La courbe passe par les foyers, ce qui est évident d'après l'équation, et ce que l'on peut apercevoir géométriquement, car si l'on mène les sécantes passant par les foyers, les pôles sont sur les directrices; donc ils se projettent aux foyers.

La courbe passe évidemment par les points de contact des tangentes à la conique issues du point P.

L'équation rend aussi évident que la courbe passe par les points où les nouveaux axes coupent les anciens.

Bien que l'énoncé ne comporte pas la construction du lieu, elle ne serait pas difficile à effectuer en prenant l'é-

quation polaire

$$\rho = \frac{d^2 \sin 2(\varphi - \omega) - c^2 \sin^2 2\omega}{2d \sin(\varphi - \omega)},$$

d et φ étant les coordonnées polaires du point P.

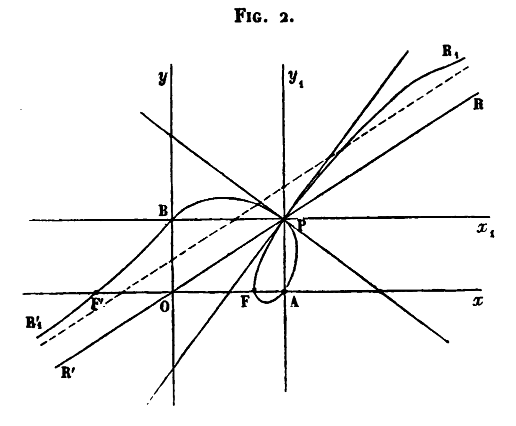
On peut aussi pour construire la courbe chercher les points où elle est coupée par une droite tournant autour de P, $y = mx$. Les abscisses des points d'intersection seront données par $x^2 = 0$, et

$$x = -\frac{\alpha\beta m^2 + (\alpha^2 - \beta^2 - c^2)m - \alpha\beta}{(1 + m^2)(\alpha m - \beta)},$$

ce qui montre qu'une sécante menée par P coupe toujours la courbe en trois points, deux confondus en P et le troisième ayant pour abscisses la valeur écrite ci-devant.

Il est à remarquer que lorsque le point P est sur l'un

Fig. 2.



des axes de la conique, le lieu se compose d'un cercle et d'une droite.

La parabole se réduit alors à une droite.

Enfin lorsque la conique donnée est un cercle, le lieu

est aussi un cercle et une droite, et en effet dans ce cas le lieu n'est que celui des milieux des sécantes menées par un point fixe dans un cercle.

Dans ce cas la discussion de l'équation montre que :

La portion de branche $F' R'_1$ devient la portion de droite OR';

La branche PR_1 devient la portion de droite PR;

L'arc de courbe PF devient la portion de droite OP;

Et l'arc F'BPAF la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 569

(voir t. XX, p. 301);

PAR M. NADAL,
Professeur à l'École de Sorèze.

Énoncé. — ABD est un triangle rectangle en B; sur AB comme diamètre, une circonférence décrite rencontre AD en E. Si AE = BD, alors AE est égal au quadrant de la circonférence à un millième de rayon près.

(A.-S. HERSCHELL.)

Solution. — Je vais prouver que ce théorème n'est pas vrai, mais qu'il le devient, si à la limite d'erreur 1 *millième* on substitue la limite 2 *millièmes*.

Je prends le rayon $\frac{AB}{2}$ pour unité de longueur; l'angle BEA inscrit dans un demi-cercle est droit, donc

$$\overline{BD}^2 = AD \times ED$$

ou bien

$$\overline{AE}^2 = AD \times ED,$$

et, par suite, AE est le plus grand segment de AD divisée en moyenne et extrême partie.

Il résulte de là

$$\text{AE ainsi que BD} = \text{AD} \times \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Or

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2,$$

donc

$$\overline{AD}^2 = 4 + \frac{\overline{AD}^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$

et

$$AD = \frac{4}{\sqrt{2(-1+\sqrt{5})}};$$

d'où

$$AE = \frac{4(-1+\sqrt{5})}{2\sqrt{2(-1+\sqrt{5})}} = \sqrt{2(-1+\sqrt{5})}.$$

Le calcul de AE donne 1,5723 à 0,0001 près par défaut. D'ailleurs $\frac{\pi}{2} = 1,5707$ à 0,0001 par défaut. Donc

$$AE > 1,572 > 1,571 > \frac{\pi}{2}$$

et

$$AE - \frac{\pi}{2} > 0,001.$$

Ainsi AE n'égale pas le quadrant à 1 millième près du rayon.

Mais on a

$$1,5724 > AE > \frac{\pi}{2} > 1,5707.$$

Donc $AE - \frac{\pi}{2} < 0,0017$ et à fortiori $< 0,002$, ce qui prouve que AE égale le quadrant à 2 millièmes près du rayon.

SOLUTION DES QUESTIONS 586 ET 587

(voir tome XX, page 296 et 297);

PAR M. NADAL.

Question 586.

La solution de ce problème se trouve dans les *Éléments de Géométrie descriptive*, par MM. Gerono et Cassanac, p. 123.

Question 587.

Solution. — Soit MN une droite qui s'appuie sur deux droites AB et CD et fait avec elles des angles égaux. Par un point I de AB je mène IE parallèle à CD et IK parallèle à MN. La droite IK forme des angles égaux avec IB et avec IE; donc elle est située dans le plan KIH mené perpendiculairement au plan de l'angle BIE suivant la bissectrice IH de cet angle. Donc la droite MN étant parallèle au plan KIH et s'appuyant constamment sur AB et sur CD, engendrera un *paraboloïde hyperbolique*.

NOTE SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES EN MECANIQUE;

PAR M. FINCK,
Professeur au lycée de Strasbourg.

C'est une remarque faite depuis longtemps, que dans les problèmes de mécanique les solutions singulières des équations différentielles peuvent être significatives. Je me propose de faire ressortir ici quelques questions qui présentent cela de commun, que dans certains cas particu-

liers l'intégrale générale devient absurde (*), tandis que la solution singulière est possible et résout la question.

Le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère, autrement dit le mouvement du pendule à oscillations coniques conduit à l'équation

$$\frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{-z^3 - kz^2 + a^2 z + a^2 k - \frac{c^2}{2g}}.$$

a est le rayon de la sphère ;

g la gravité ;

z la distance du mobile au plan horizontal mené par le centre de la sphère, z positif est dirigé de haut en bas ;

$2gk$ la constante introduite par l'intégration relative à la force vive, c'est-à-dire que $2gk = v_0^2 - 2gz_0$; v_0, z_0 valeurs initiales de v et z ;

cdt est la valeur constante de $xdy - ydx$.

Je pose

$$f(z) = z^3 + kz^2 - a^2 z - a^2 k + \frac{c^2}{2g}.$$

Cette fonction a des racines égales ou non. Si les trois racines étaient égales, elles seraient négatives, car

$$f(-a) = \frac{c^2}{2g} \quad \text{et} \quad f(-\infty) = -\infty.$$

Or cela ne se peut pas, vu que du premier au troisième terme il y a une variation.

S'il y a deux racines égales, elles sont positives, car les trois racines ne sauraient être négatives, et si elles sont réelles toutes, comme il y a une variation au moins, il y aurait une racine positive ; donc entre $-a$ et $-\infty$ il n'y en a qu'une de négative.

(*) Absurde, non, mais seulement analytiquement vrai et non physiquement exécutable, comme cela arrive encore pour d'autres problèmes. TM.

Soit α la racine positive double, $-\beta$ la racine négative; il vient

$$\frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{dt} = (z - \alpha)\sqrt{-(z+\beta)}; \tag{1}$$

l'intégrale générale de cette équation ne donne que des valeurs imaginaires de t pour des valeurs réelles de z, sauf exception.

Car en posant,

$$z_1 + \beta = u^2,$$

on en tire

$$\frac{1}{a} dt \sqrt{2g}\sqrt{-1} = \frac{2du}{u^2 - \alpha - \beta}.$$

Soit

$$\alpha + \beta = \gamma^2;$$

de là

$$\frac{\sqrt{-2g}}{a} = \frac{1}{\gamma} \log \frac{(u+\gamma)(u_0 - \gamma)}{(u-\gamma)(u_0+\gamma)},$$

u_0 valeur initiale de u.

Ensuite

$$\frac{(u+\gamma)(u_0-\gamma)}{(u-\gamma)(u_0+\gamma)} = \cos t \frac{\gamma\sqrt{2g}}{a} + \sqrt{-1} \sin t \frac{\sqrt{2g}\,\gamma}{a};$$

u n'est réel que si $\sqrt{2g} \cdot \frac{k}{a}$ est un multiple de π, ce qui donne

$$u^2 = \gamma^2 = \alpha + \beta, \quad z = \alpha.$$

Du reste l'équation (1) montre que $\frac{dz}{dt}$ n'est réel que si $z = \alpha$; d'où

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Or $z = \alpha$ forme une solution ou intégrale singulière,

et puisque z est constant, il est $= z_0$. La vitesse dont le carré $= 2gz + 2gk$ est aussi constante, et le pendule décrit d'un mouvement uniforme un cône droit. Si l'on met pour les constantes leurs valeurs en fonction de v_0, z_0, etc., on trouve que pour l'égalité de deux des racines de $fz = 0$, il faut et il suffit que le poids du mobile et la force centripète initiale aient leur résultante dirigée sur le centre de la sphère, ce à quoi on pouvait s'attendre.

Ce second exemple est tiré de la théorie des forces centrales. La force attractive étant $\frac{t^2}{r^2}$, r le rayon vecteur, θ l'angle $\frac{1}{r} = z$, on sait qu'on a

$$d\theta = \frac{cdz}{\sqrt{c' + 2\mu z - c^2 z^2}};$$

si les racines du dénominateur sont égales, on a

$$d\theta\sqrt{-1} = \frac{cdz}{cz - \frac{\mu}{c}},$$

d'où

$$(\theta - \theta_0)\sqrt{-1} = \log \frac{c^2 z - \mu}{c^2 z_0 - \mu}$$

et

$$\frac{c^2 z - \mu}{c_2 z_0 - \beta} = \cos(\theta - \theta_0) + \sqrt{-1}.\sin(\theta - \theta_0).$$

Cette équation ne représente donc pas le monvement, qui est donné par l'intégrale singulière

$$z = \frac{\mu}{c^2}, \quad \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

L'orbite est un cercle décrit d'un mouvement uniforme, et la force attractive initiale est égale à la force centri-

pète. Le mouvement circulaire n'est d'ailleurs pas non plus compris dans le cas général du mouvement sur la section conique.

La condition des racines égales donne

$$\mu^2 + c^2 c' = 0,$$

où

$$c' = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

v_0 vitesse initiale, r_0 rayon vecteur initial;

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha,$$

α angle que fait r_0 avec la direction de v_0. Par conséquent notre condition devient (je supprime l'indice o pour simplifier)

$$\mu^2 + \left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right) r^2 v^2 \sin^2\alpha = 0$$

ou

$$\mu^2 - 2\mu r v^2 \sin^2\alpha + r^2 v^4 \sin^2\alpha = 0;$$

ajoutant et retranchant,

$$(\mu - r v^2 \sin^2\alpha)^2 + r^2 v^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 0,$$

ce qui exige que

$$\mu - r v^2 \sin^2\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 0.$$

On ne peut supposer

$$\sin^2\alpha = 0;$$

il en résulterait

$$\mu = 0,$$

donc

$$\cos^2\alpha = 0;$$

d'où

$$\sin^2\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \mu = r v^2,$$

puis

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{v^2}{r}.$$

Donc en effet la force attractive initiale est égale à la force centripète et la vitesse v_0 proportionnelle à r_0.

On reconnaît d'ailleurs facilement que les solutions de ces cas particuliers sont des intégrales singulières.

Je prends pour troisième exemple la toupie. J'ai prouvé que sous certaines conditions la toupie ne tombe pas, et que sa pointe décrit une courbe renfermée entre deux cercles, courbe composée en général d'une infinité de branches égales (*voir* t. IX, p. 310) (*).

Mais ceci n'a lieu que si le numérateur de $\frac{dz^2}{dt^2}$ qui $= 2g(\zeta - \gamma)[\zeta^2 - \beta^2 - \lambda(\zeta - \gamma)]$, n'a pas de *racines égales*. Le trinôme du second degré ci-dessus n'a ses ra-

---

(*) Les deux propriétés de cette courbe, savoir d'être normale au cercle intérieur et tangente au cercle extérieur, peuvent s'établir plus simplement que je ne l'ai fait dans l'article cité. D'après les notations qui y ont été employées, ψ étant égal à l'angle que le rayon vecteur de la pointe décrit, on a

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{C_n}{AB}(\gamma - \zeta).$$

Chaque fois que la pointe est sur le cercle intérieur, on a

$$\zeta = \delta, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\psi}{dt} = 0;$$

par conséquent durant dt, le rayon vecteur reste immobile, la pointe se meut sur ce rayon OA, et celui-ci est tangent à la trajectoire. Quant à la circonférence extérieure, soit, en général, $SO = \rho$, la tangente de l'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur ρ est $\frac{\rho d\psi}{d\rho}$, ou, vu que $\rho = \beta \sin\theta$, $\frac{\sin\theta d\psi}{\cos\theta d\theta}$. Mais en B, où ζ a son minimum et θ son maximum, $d\theta$ est nul, et le minimum de ζ étant $< \gamma$, $d\psi$ n'est pas nul. Donc $\frac{\rho d\psi}{d\rho}$ y est infini, et la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur OB.

cines égales que si $\gamma = \beta$, $\lambda = 2\beta$; sauf ce cas, deux racines ne peuvent être égales entre elles que si elles les ont à γ; ainsi il faut que $\gamma^2 - \beta^2 = 0$ ou $\beta = \gamma$, c'est-à-dire qu'à l'origine du mouvement l'axe de la toupie soit vertical, ce qui donne

$$\frac{d + \sqrt{2g}}{\sqrt{\beta^2 + k^2 - \zeta^2}} = \frac{d\zeta}{(\zeta - \beta)\sqrt{\zeta + \beta - \lambda}}.$$

Cette équation admet l'intégrale singulière

$$\zeta = \beta,$$

qui seule résout la question.

En effet il y a trois cas :

1° $\lambda > 2\beta$. Je désigne par Z une des valeurs que prend $\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\beta^2 - k^2 - \zeta^2}}$ depuis t_0 jusqu'à t, en supposant que ζ puisse varier ; on aura

$$z(t - t_0) = \int_\beta^\zeta \frac{d\zeta}{(\zeta - \beta)\sqrt{\zeta + \beta - \lambda}}.$$

Soit posé

$$\zeta + \beta - \lambda = -u^2;$$

u^2 sera > 0, car ζ ne surpasse point β et $\lambda > 2\beta$. La différentielle devient

$$\frac{2du}{u^2 - \varepsilon^2}$$

et a pour intégrale indéfinie

$$\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{u - \varepsilon}{u + \varepsilon} + c;$$

d'où

$$z(t - t_0)\sqrt{-1} = \infty.$$

Car pour $\zeta = \beta$, u^2 est $\lambda - 2\beta = \varepsilon^2$. Donc, etc.

2° $\lambda = 2\beta$. La différentielle devient

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - \beta)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'intégrale entre β et ζ est encore infinie.

3° $\lambda < 2\beta$. On fera

$$\zeta + \beta - \lambda = u^2, \quad 2\beta - \lambda = \varepsilon^2,$$

et la différentielle est encore

$$\frac{2\,du}{u^2 - \varepsilon^2}.$$

Donc dans aucun cas l'intégrale générale ne convient.

Il y aurait une généralité à déduire de là.

SUR LA STABILITÉ DU MOUVEMENT DE ROTATION d'un corps autour d'un axe principal;

PAR M. FINCK.

On peut donner à cette question plus de précision de la manière suivante : Avec les notations ordinaires, l'équation du cône que décrit l'axe instantané dans le corps est, par rapport aux axes principaux,

$$(1) \quad A(Ah - k^2)x_1^2 + B(Bh - k^2)y_1^2 + C(Ch - k^2)z_1^2 = 0.$$

Les valeurs initiales de p, q, r étant p_0, q_0, r_0, on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} Ah - k^2 &= (A - B)Bq_0^2 + (A - C)Cr_0^2, \\ Bh - k^2 &= (B - A)Ap_0^2 + (B - C)Cr_0^2, \\ Ch - k^2 &= (C - B)Bq_0^2 + (C - A)Ap_0^2. \end{aligned} \right.$$

Je suppose un corps tournant autour de Ox_1 (O désigne le point fixe); je lui applique un couple d'impulsion très-petit. p subira un changement très-petit; q, r

qui étaient nulles, prendront de petites valeurs; je désigne par p_0, q_0, r_0 les valeurs de p, q, r initiales pour ce nouvel état. D'ailleurs je suppose $A > B > C$; il s'ensuit que $Ah - k^2 > 0$; $Bh - k^2$ peut être supposé < 0, car r_0^2 étant très-petit, tandis que p_0^2 ne l'est pas, on peut admettre que $(A - B) Ap_0^2 > (B - C) Cr_0^2$; il suffit de de donner pour cela au couple perturbateur une valeur convenable. Le cône elliptique (1) est donc décrit autour de Ox_1; les angles au centre de ses sections principales étant nommés α et β, on a

$$\tang^2\alpha = \frac{A(Ah - k^2)}{B(k^2 - Bh)} = \frac{A}{B} \cdot \frac{(A - B)Bq_0^2 + (A - C)Cr_0^2}{(A - B)Ap_0^2 - (B - C)Cr_0^2},$$

$$\tang^2\beta = \frac{A}{C} \cdot \frac{(A - B)Bq_0^2 + (A - C)Cr_0^2}{(A - C)Ap_0^2 + (B - C)Cr_0^2}.$$

On peut supposer q_0, r_0 assez petits par rapport à p_0 pour que ces angles soient aussi petits qu'on veut. Le mouvement est donc stable autour de Ox_1; de même autour de Oz_1.

Mais si le corps tourne autour de Oy_1 et qu'il survienne une perturbation qui rende $Bh - k^2 \gtrless 0$, l'axe instantané décrira le cône (1) qui enveloppe l'axe z_1 ou l'axe x_1. Le mouvement autour de Oy_1 n'est donc pas stable, sauf le cas particulier où $Bh - k^2 = 0$.

Dans le cas où $A = B$, le cône (1) est de révolution autour de Oz_1. Le mouvement est stable autour de Oz_1; il ne l'est pas autour de Ox_1. Car si le corps tourne autour de Oz_1 ou de Ox_1, une perturbation quelconque fera décrire à l'axe instantané le cône (1) dont l'angle au centre a pour tangente $\frac{z_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}$, de sorte que si p_0, q_0 sont petits par rapport à r_0, cet angle est très-petit. Dans aucun cas l'axe instantané ne restera très-rapproché de Ox_1.

RELATIONS DANS LES CONIQUES PLANES PAR GAUSS,
Constante de Gauss et Problème de Kepler.

ELLIPSE.

Équation polaire, foyer, pôle.

Notations.

$r =$ rayon vecteur.

$\nu =$ angle du rayon vecteur avec la partie du grand axe compris entre le foyer et le sommet voisin et compté depuis cette partie; $\nu = 0$ rayon vecteur minimum; $\nu = 180^\circ$ rayon vecteur maximum. ν compris entre 180° et 360° donne la seconde moitié de l'ellipse, courbe fermée.

$a =$ demi grand axe de l'ellipse.

$\varphi =$ angle formé par le rayon vecteur passant par le petit axe et le rayon vecteur qui passe par son extrémité; rayon vecteur égal à $a = \sin\varphi = \frac{b}{a}$; $b =$ demi petit axe.

$p =$ demi-paramètre.

$e =$ nombre donné; lorsque $e = \sqrt{a^2 - ap}$, e est la distance du centre à un foyer, dite l'*excentricité*.

$\mathrm{E} =$ angle dont le cosinus est égal à $\frac{a-r}{ae} =$ anomalie excentrique.

Relations.

I. $p = a\cos^2\varphi$.

II. $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\nu}$.

III. $r = a(1 - e\cos E)$.

IV. $\cos E = \dfrac{e + \cos v}{1 + e\cos v}$.

V. $\sin\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos E)} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e\cos v}}$

$= \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r(1-e)}{p}} = \sin\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r}{a(1+e)}}$.

VI. $\cos\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos E)} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{1+e}{1+e\cos v}}$

$= \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r(1+e)}{p}} = \cos\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{r}{a(1-e)}}$.

VII. $\text{tang}\,\frac{1}{2}E = \text{tang}\,\frac{1}{2}v\,\text{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right)$

$= \text{tang}\,\frac{1}{2}v\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$.

VIII. $\sin E = \dfrac{r\sin v\cos\varphi}{p} = \dfrac{r\sin v}{a\cos\varphi}$.

IX. $r\cos v = a(\cos E - e)$

$= 2a\cos\left(\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}\varphi + 45^\circ\right)\cos\left(\frac{1}{2}E - \frac{1}{2}\varphi - 45^\circ\right)$.

X. $\sin\frac{1}{2}(v - E) = \sin\frac{1}{2}\varphi\sin v\sqrt{\dfrac{r}{p}} = \sin\frac{1}{2}\varphi\sin E\sqrt{\dfrac{a}{r}}$.

XI. $\sin\frac{1}{2}(v + E) = \cos\frac{1}{2}\varphi\sin v\sqrt{\dfrac{r}{p}} = \sin\frac{1}{2}\varphi\sin E\sqrt{\dfrac{a}{r}}$.

Demi petit axe $= a\cos\varphi = \dfrac{p}{\cos\varphi} = \sqrt{ap}$.

Distance du centre au foyer $= \dfrac{ep}{1-e^2} = ae$; e est l'excentricité = distance moyenne.

HYPERBOLE.

$\psi =$ angle dont le cosinus égale $\frac{1}{e}$.

Pendant que v croît entre les limites $-(180-\psi)$, $+(180-\psi)$, r approchant de ces limites croît indéfiniment, et atteignant ces limites, r devient infini, ce qui indique qu'une droite faisant avec l'axe focal un angle supérieur ou inférieur à $180^\circ - \psi$ ne coupe pas l'hyperbole. La courbe est formée de deux branches séparées par un espace vide.

Ces valeurs exclues, les valeurs de r comprises entre $180^\circ - \psi$ et $180^\circ + \psi$ donnent des valeurs négatives pour r^n, qui indique que le rayon vecteur coupe une hyperbole et par l'autre

$$r = \frac{p}{1 + e \cos r};$$

faisant successivement

$$\varphi = 0, \quad \varphi = 180^\circ,$$

on trouve les rayons vecteurs minima dans les deux branches, et le demi-axe focal $= \frac{p}{1-c^2}$.

Relations.

φ et E deviennent imaginaires.

Notations.

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos \frac{1}{2}(v+\psi)} = u.$$

ψ angle dont le cosinus $= \frac{1}{e}$; faisons $a = -b$, b étan positif.

PARABOLE.

Equation polaire, le foyer étant le pôle,

$$r = \frac{p}{1 - \cos v};$$

cette équation suffit.

Gauss ne donne pas cette équation

$$N = \frac{e[2(u^2 - 1)]}{2u},$$

analogue à l'anomalie moyenne dans l'ellipse.

Relations.

I. $b = p \cot^2 \psi$.

II. $r = \dfrac{p}{1 + e \cos v} = \dfrac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)}$.

III. $\tan \frac{1}{2} F = \tan \frac{1}{2} v \sqrt{\dfrac{1 - e}{1 + e}} = \tan \frac{1}{2} v \tan \frac{1}{2} \psi$
$= \dfrac{u - 1}{u + 1}$.

IV. $u = \dfrac{1 + \tan \frac{1}{2} F}{1 - \tan \frac{1}{2} F} = \tan \left(45° + \frac{1}{2} F\right)$.

V. $\dfrac{1}{\cos F} = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{1 + \cos \psi \cos v}{2 \cos \frac{1}{2}(v - \psi) \cos \frac{1}{2}(v + \psi)}$
$= \dfrac{e + \cos v}{1 + e \cos v}$.

VI. $\sin \frac{1}{2} v \sqrt{r} = \sin \frac{1}{2} F \sqrt{\dfrac{p}{(e - 1) \cos F}}$
$= \sin \frac{1}{2} F \sqrt{\dfrac{e + \cos v}{\cos F}}$.

VII. $\cos\frac{1}{2}v\sqrt{r} = \cos\frac{1}{2}F\sqrt{\frac{p}{(1+e)\cos F}}$.

VIII. $r\sin v = p\cot\psi\,\mathrm{tang}\,F = \frac{1}{2}b\,\mathrm{tang}\,\psi\left(u - \frac{1}{u}\right)$.

IX. $r\cos v = b(1-\cos F) = \frac{1}{2}b\left(2e - u - \frac{1}{u}\right)$.

X. $r = b\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right) = \frac{1}{2}b\left[e\left(u + \frac{1}{u}\right) - 2\right]$.

Le calcul différentiel donne

$$\int r^2 dv = b^2\,\mathrm{tang}\,\psi\left[\frac{1}{2}e\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\right]$$

$$= b^2\,\mathrm{tang}\,\psi\left[\frac{1}{2}e\left(1+\frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{u}\right]du,$$

et intégrant

$$b^2\,\mathrm{tang}\,\psi\left[\frac{1}{2}e\left(u - \frac{1}{u}\right)\right] - \log u = \sqrt{b}\sqrt{u}.$$

Le logarithme est hyperbolique.

XI. $\frac{1}{2}\left(\frac{u^2-1}{u}\right) - \log u = \frac{kt}{b^{\frac{3}{2}}}$.

XII. $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{tang}\,\psi\sin v}{2\cos\frac{1}{2}(v+\psi)\cos\frac{1}{2}(v-\psi)} - \frac{\log\cos\frac{1}{2}(v-\psi)}{\cos\frac{1}{2}(v+\psi)}$.

CONSTANTE DE GAUSS.

Cette constante est relative aux lois de Kepler.

Supposons une *seule* planète soumise à l'attraction du Soleil, et par conséquent elle décrira une conique autour du Soleil placé au foyer de la conique, et son mouvement

ne subira aucune perturbation, puisqu'il n'existe pas de corps perturbant.

Notations.

$t =$ le temps.

$\frac{1}{2} g =$ aire du secteur décrit par le rayon vecteur pendant le temps t.

$p =$ paramètre.

$\mu =$ masse de la planète, celle du Soleil prise pour unité; l'expression $\frac{g}{t\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}}$ est constante pour toutes les planètes de notre système, chacune prise isolément. Représentons cette constante par k, on a

$$k = \frac{g}{t\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}}.$$

1° Soit, pour la même planète et un temps t', l'aire correspondante égale g'; p et μ ne changent pas; donc

$$\frac{g}{t} = \frac{g'}{t'},$$

c'est-à-dire les aires décrites sont proportionnelles au temps (loi de Kepler).

2° Pour deux planètes différentes, dans des temps égaux, les carrés des g sont proportionnels aux paramètres multipliés par la somme de la masse du Soleil et de la masse de la planète (loi de Kepler).

3° Soit T le temps employé à décrire tout le périmètre de l'ellipse; alors

$$\frac{1}{2} g = \pi ab, \quad a = \text{demi grand axe}, \quad b = \text{demi petit axe}.$$

Ainsi

$$T^2 = \frac{\pi ab}{p(1+\mu)}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad T^2 = \frac{\pi a 3 b}{t}, \quad T = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi};$$

les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes (loi de Kepler).

Prenons pour planète la Terre et pour unité linéaire la distance de la Terre au Soleil, alors la constante k, et pour temps l'année sidérale pendant laquelle s'accomplit une révolution entière; nous aurons

$$k = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+\mu}}:$$

$$T = 365,2563835 \qquad \mu = \frac{1}{354710}$$

$$\log 2\pi = 0,7981798684$$
$$c^t \log T = 7,4374021852$$
$$c^t \log \sqrt{1+\mu} = 9,9999993878$$

$$\log k = 8,2355814414$$
$$k = 0,01720209895.$$

PROBLÈME DE KEPLER.

$$g = kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu} = \int r^2 dv,$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{p\cos^2\frac{1}{2}E}{(1+e)\cos^2\frac{1}{2}v}.$$

A l'aide de cette équation et de la relation VII, on trouve

$$r^2 dv = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(E - e\sin E);$$

intégrant

$$kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu} = \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(E - \sin E),$$

la constante est nulle; car, comptant du périhélie, on a $\nu = 0$ et aussi $E = 0$.

$$k + \sqrt{p}\sqrt{1+\mu} = \frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e\sin E.$$

E étant exprimé en secondes, il faut exprimer $kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}$ aussi en secondes. Or la longueur du rayon 1 en secondes est 206264,67; c'est par cette quantité qu'on devra multiplier $kt\sqrt{p}\sqrt{1+\mu}$. Réduite ainsi en secondes, cette quantité, désignée par M, porte le nom d'*anomalie moyenne; k* réduite en secondes égale 3548″,18761 dont le logarithme est 3,5500065746.

M. de Gasparis (*) a donné dans les *Astronomische Nachrichten*, t. XLVI, p. 19-62 (1857) des Tables pour la solution du problème de Kepler, e étant supposé < 1.

QUESTIONS.

615. Soit une progression arithmétique avec différence δ_1 et la série arithmétique d'ordre m_1 déduite de cette progression.

Une seconde progression d'arithmétique de différence δ_2, et une série arithmétique déduite et d'ordre m_2, et ainsi de suite jusqu'à la série d'ordre m_n.

Si, multipliant ensemble les premiers termes de ces séries, de même les seconds termes, on obtient une série d'arithmétique d'ordre $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ déduite

(*) Annibal de Gasparis, astronome à l'observatoire de Capo del Monte, près Naples, né à Buguara (Abruzzes), le 9 novembre 1819.

d'une progression arithmétique à différence

$$\frac{1.2.3\ldots m_1+m_2+\ldots+m_n}{1.2.3\ldots m_1\times 1.2.3\ldots m_2\ldots 1.2.3\ldots m_n}\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n.$$

616. Soit construit un triangle MNO, le sommet N est fixe ainsi que les *directions* des côtés NM et NO, le côté MO a une longueur *donnée*; par conséquent il touchera une certaine courbe; le point de contact sur chaque tangente MO est aussi éloigné de M que la projection orthogonale de O est éloignée de N (*); cette courbe, nommée *hypocycloïde*, est fermée et composée de quatre branches correspondant aux quatre angles des directions données NM, NO. (Böklen.)

617. *Théorème*. Soient $w = u + iv$ une fonction monodrome ou monogène (**); une courbe fermée $f(x, y) = 0$ dans le plan horizontal des indices de z; un cylindre vertical qui a $f(x, y) = 0$ pour base; deux plans verticaux P et P' rectangulaires.

Supposons que w ne devienne ni nulle ni infinie dans l'intérieur de $f(x, y) = 0$ et que l'indice de z parcoure $f(x, y)$. Sur chaque génératrice (x, y) du cylindre portons, à partir de la base, les longueurs u et v correspondantes, nous obtiendrons ainsi deux courbes U et V.

L'aire de la projection de U ou de V sur le plan P est égale à l'aire de la projection de V ou de U sur P'.

(Dewulf.)

(*) L'équation de cette courbe a été trouvée par Joachimsthal (*Nouvelles Annales*, t. VI, p. 260; 1847).

(**) On donnera incessamment l'explication de ces dénominations établies par Cauchy.

SOLUTION DE LA QUESTION 577

(voir t. XX, p. 138);

PAR M. DUPAIN,
Professeur à Nîmes.

Observation.

Cette question est résolue dans les *Annales de Gergonne*, t. III, p. 189; elle est attribuée à Français, professeur aux écoles d'artillerie, par son frère, qui a rédigé l'article.

L'énoncé présente une certaine différence avec l'énoncé actuel; le mot *double* n'y figure pas; cette différence tient, je crois, au choix des unités.

Voici le résumé de la démonstration de Français :

Conventions. — L'unité d'angle polyèdre est le trièdre trirectangle; l'unité d'angle dièdre est l'angle dièdre droit.

Lemme. — Un trièdre a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits.

Lemme. — Un angle polyèdre a pour mesure la somme de ses angles diminuée d'autant de fois deux angles droits qu'il y a de faces moins deux.

Considérons un polyèdre ayant A arêtes, F faces et S sommets, dont α trièdres, β tétraèdres, γ pentaèdres, etc. On voit facilement que la somme des angles polyèdres du polyèdre vaut la somme des angles dièdres moins

$$2\alpha(3-2)+2\beta(4-2)+2\gamma(5-2)+\ldots.$$

Or cette dernière quantité peut s'écrire

$$6\alpha + 8\beta + 10\gamma + \ldots - 4\alpha - 4\beta - 4\gamma \ldots,$$

ou bien $4A - 4S$, ou enfin $4(F-2)$. C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 602

(voir t. XX, p 400);

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

Le point attiré est sur l'axe des x à une distance a de l'origine; le plan attirant est celui de zy; je décompose ce plan en éléments par des cercles ayant l'origine pour centre et par les rayons de ces cercles.

L'élément de surface est $r\,dr\,d\theta$.

La distance de l'élément au point attiré est $(a^2+r^2)^{\frac{1}{2}}$.

En appelant μ un coefficient constant, l'attraction d'un élément sera

$$\mu r\,dr\,d\theta(a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}},$$

et la composante suivant l'axe des x sera

$$a\mu r\,dr\,d\theta(a^2+r^2)^{-2}.$$

La résultante a pour expression

$$a\mu\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^r r\,dr(a^2+r^2)^{-2} = \frac{\mu\pi}{a} - \frac{\mu\pi a}{a^2+r^2}.$$

Si le plan est illimité $r=\infty$, et la résultante devient $\frac{\mu\pi}{a}$.

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 609

(voir p. 31);

PAR M. RICHARD,
Elève du lycée de Douai.

Soient MF $= c$ et soient x_1, y_1 les coordonnées du point R, on a

$$\text{Equation de } Ff \ldots \quad y = -\frac{x_1 - c}{y_1}(x + c),$$

$$\text{Equation de } F'f' \ldots \quad y = -\frac{x_1 + c}{y_1}(x - c).$$

Les coordonnées de H sont x_1 et $\frac{c^2 - x_1^2}{y_1}$. Remarquant que le quadrilatère FF$'ff'$ est inscriptible, la hauteur RH est la polaire du point C; donc l'abscisse du point C est $\frac{c^2}{x_1}$ dont l'équation du cercle passant par les trois points R, H, C est

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_1^2 + \frac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1 & \frac{c^2 - x_1^2}{y_1} & 1 \\ \frac{c^4}{x_1^2} & \frac{c^2}{x_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La longueur de la tangente MT menée par l'origine sera

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_1^2 + \frac{(c_2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1 & \frac{c^2 - x_1^2}{y_1} \\ \frac{c^4}{x_1^2} & \frac{c^2}{x^2} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & \frac{c^2 - x_1}{y_1} & 1 \\ \frac{c^2}{x_1} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Faisant sortir c^2 du numérateur, multipliant les deux déterminants par x_1 et y_1, et retranchant la seconde colonne de la première dans le premier déterminant, on a

$$\delta^2 = -c^2 \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1^2 & y_1^2 \\ \dfrac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1^2 & c^2 - x_1^2 \\ \dfrac{c^2 - x_1^2}{x_1^2} & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_1^2 & c^2 - x_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Or le second déterminant, en retranchant la seconde ligne de la première, donne en développant

$$-(x_1^2 + y_1^2 - c^2)(x_1^2 - c^2).$$

Effectuant la même opération sur le second déterminant, on a

$$(x_1^2 + y_1^2 - c^2) \begin{vmatrix} \dfrac{y_1^2 + c^2 - x_1^2}{y_1^2} & 0 & 1 \\ \dfrac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1^2 & c^2 \\ \dfrac{c^2 - x_1^2}{x_1^2} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 - c^2) \left[\begin{array}{c} \dfrac{(y_1^2 + c^2 - x_1^2)(x_1^2 - c^2)}{y_1^2} \\ + (c^2 - x_1^2)\left(\dfrac{c^2 - x_1^2}{y_1^2} - 1\right) \end{array} \right]$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 - c^2)(x_1^2 - c^2)\left[\frac{y_1^2 + c^2 - x_1^2 - c^2 + x_1^2 + y_1^2}{y_1^2}\right]$$

$$= 2(x_1^2 - c^2)(x_1^2 + y_1^2 - c^2).$$

Divisant, on a

$$\delta^2 - 2c^2, \quad \delta = c\sqrt{2},$$

quantité constante. C. Q. F. D.

Nous étions loin de prévoir, il y a peu de jours encore, que le premier article de ce numéro des Annales dût être un article nécrologique sur l'un des hommes les plus honorables de l'époque.

Notre infatigable et savant collaborateur, M. Terquem, vient de mourir.

Conservant jusqu'à ses derniers instants une admirable ardeur au travail, il a dignement accompli la mission qu'il s'était donnée de consacrer sa vie entière aux progrès de la science.

La bienveillance de son caractère, sa profonde érudition, ses nombreux titres scientifiques, lui mériteront d'unanimes regrets.

Puisse l'estime publique, qui environne son nom, apporter quelque consolation à sa famille.

G.

SOLUTION DE LA QUESTION 313

(voir t. XIV, p. 305);

PAR M. J.-CH. DUPAIN.
Professeur au lycée de Nîmes.

Nous prions le lecteur de construire lui-même la figure. Nous plaçons l'origine des coordonnées au milieu de notre feuille de papier, l'axe des x se dirige vers la droite, l'axe des y vers le bas de la page et l'axe des z s'élève perpendiculairement au papier.

L'équation proposée

$$e^z = \frac{\cos x}{\cos y}$$

peut se mettre sous d'autres formes utiles à considérer :

$$e^z = \frac{\text{séc}\, y}{\text{séc}\, x}, \quad z = \text{l.}\cos x - \text{l.}\cos y, \quad z = \text{l.séc}\, y - \text{l.séc}\, x.$$

Les dérivées partielles de z sont

$$\frac{dz}{dx} = -\tang x, \qquad \frac{dz}{dy} = \tang y,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\text{séc}^2 x, \qquad \frac{d^2 z}{dx\, dy} = 0, \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} = \text{séc}^2 y,$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = -2 \tang x\, \text{séc}^2 x, \qquad \frac{d^3 z}{dx^2\, dy} = 0, \qquad \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^3 z}{dy^3} = 2 \tang y\, \text{séc}^2 y.$$

Le rayon de courbure des sections normales principales

a pour expression

$$R = \pm \frac{1 + \tan^2 x + \tan^2 y}{\text{séc}\, x . \text{séc}\, y},$$

et il est remarquable que ces deux valeurs sont numériquement égales et de signes contraires.

L'équation ne change pas quand on remplace x par $-x$ ou y par $-y$; la surface est donc symétrique par rapport aux plans zOx, zOy.

L'équation ne change pas non plus quand on ajoute aux coordonnées x, y des multiples de π pairs tous les deux ou tous les deux impairs; on peut donc, en déplaçant parallèlement les plans zOx, zOy, transporter l'origine en une infinité de points ayant pour coordonnées des multiples de π (pairs ou impairs tous les deux). Les nouveaux plans coordonnés sont encore des plans de symétrie, de sorte que la surface est symétrique par rapport à une infinité de plans parallèles à deux directions rectangulaires, la distance constante de deux plans consécutifs étant π.

Traçons sur le plan xOy, que j'appellerai *horizontal*, des parallèles à Oy par les points dont les abscisses sont des multiples impairs de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$; traçons aussi des parallèles à Ox par les points dont l'y est un multiple impair de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ces deux systèmes de parallèles détermineront des carrés disposés comme les cases d'un damier, et que je supposerai, comme celles-ci, alternativement blancs et noirs, le carré qui contient l'origine étant censé blanc.

Je dis d'abord que pour tous les points situés dans un carré *noir* l'ordonnée de la surface est imaginaire, car pour tous ces points $\cos x$ et $\cos y$ sont de signes con-

traires, et le rapport $\frac{\cos x}{\cos y}$ étant négatif n'a pas de logarithme réel.

Pour tous les points situés dans un carré *blanc*, l'ordonnée est réelle, et la surface est ainsi formée d'une infinité de nappes identiques entre elles et rattachées les unes aux autres par des droites communes. Ces droites sont les parallèles menées à l'axe Oz par les sommets des différents carrés. En effet, l'x et l'y de ces sommets étant des multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ et $\cos y$ y sont nuls, et $e^z = \frac{0}{0}$.

L'ordonnée de la surface est nulle quand $\cos x = \cos y$; on a alors

$$x = \pm y \pm 2n\pi.$$

Le lieu des points ainsi définis se compose de deux séries de droites, parallèles aux bissectrices des angles formés par Ox et Oy, et dont les ordonnées à l'origine sont des multiples pairs de π. Ces droites sont précisément les diagonales des carrés *blancs*. Elles partagent chacun de ces carrés en quatre triangles isocèles rectangles, deux à droite, deux à gauche et deux vers le haut et le bas de la page; dans ces derniers, l'ordonnée de la surface est positive; elle est négative dans les deux autres.

Sections horizontales. — Pour fixer les idées, coupons la surface par un plan horizontal ayant pour ordonnée $0,69315 = \text{l}.2$; la section de la surface par ce plan étant projetée horizontalement, aura pour équation

$$e^{\text{l}2} = \frac{\cos x}{\cos y}$$

ou

$$\cos x = 2\cos y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2\sin y}.$$

Cette courbe a une infinité de centres, d'axes et de branches. Je considérerai l'une d'elles en particulier. Pour $x = 0$, on a

$$\cos y = \frac{1}{2},$$

et l'on peut prendre

$$y = \frac{\pi}{3}.$$

La tangente est parallèle aux x; quand x augmente, y augmente. Pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$y = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2};$$

l'y continue à augmenter jusqu'à un maximum $y = \frac{2}{3}\pi$ qui correspond à $x = \pi$; y diminue ensuite. Pour $x = \frac{3\pi}{2}$,

$$y = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $x = 2\pi$,

$$y = \frac{\pi}{3}.$$

A partir de là y repasse périodiquement par les mêmes valeurs.

On aurait pu pour $x = 0$ prendre $y = \frac{5\pi}{3}$. On obtiendrait ainsi une seconde branche symétrique de la première par rapport à la droite $(y = \pi)$. En adoptant pour

valeur initiale de y $\frac{7\pi}{3}$, on trouvera une troisième branche symétrique de la seconde par rapport à la droite $(y = 2\pi)$, et ainsi de suite indéfiniment. Toutes ces branches affectent les allures d'une sinusoïde.

A mesure que le plan sécant s'élève au-dessus du plan xOy, ces différentes branches de courbes *s'aplatissent*, c'est-à-dire se rapprochent des droites autour desquelles elles ondulent.

Si l'ordonnée du plan sécant devient négative, les différentes branches de la section conservent leurs grandeurs et leurs positions respectives, mais la figure entière effectue un quart de révolution autour du point O.

Sections verticales. — Prenons un plan sécant parallèle à zOx et dont l'y soit a. La section a pour équation

$$z = \mathrm{l}.\cos x - \mathrm{l}.\cos a, \quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{tang} x.$$

L'ordonnée à l'origine est $-\mathrm{l}.\cos a$, la tangente à l'origine est horizontale. Quand x augmente de o à $\frac{\pi}{2}$, l'ordonnée diminue en valeur algébrique; elle est nulle pour $x = a$ et négative quand x est compris entre a et $\frac{\pi}{2}$. Le coefficient angulaire de la tangente reste négatif et augmente en valeur numérique jusqu'à l'infini. La droite $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote.

On trouve ensuite une seconde branche symétrique de la première par rapport à la droite $x = \pi$, puis une nouvelle branche symétrique de la seconde par rapport à la droite $x = 2\pi$, et ainsi de suite indéfiniment, les axes de symétrie ayant pour abscisses les multiples de π.

Il est à remarquer que ces différentes sections sont

égales entre elles, que l'ordonnée z ne varie de l'une à l'autre que d'une quantité constante, et qu'enfin on peut les regarder comme les positions successives d'une génératrice invariable de forme qui se déplacerait parallèlement à elle-même.

Les sections parallèles à zOy ne diffèrent des précédentes que par le changement de signe de l'ordonnée z.

Les sections parallèles à zOx et zOy sont donc disposées entre elles comme les sections paraboliques parallèles aux plans principaux du paraboloïde hyperbolique, et la surface peut être engendrée par la courbe $z = \mathrm{l}.\cos x$ glissant parallèlement à elle-même sur une seconde courbe, $z = - \mathrm{l}.\cos y$, égale, ayant même sommet, l'ouverture en sens contraire et placée dans un plan perpendiculaire.

Le paraboloïde osculateur à l'origine a pour équation

$$2z = y^2 - x^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = -x, \quad \frac{dz}{dy} = y, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = -1, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = 1, \quad \frac{d^2 z}{dx\, dy} = 0.$$

Les dérivées partielles des ordres suivants sont nulles. A l'origine $x = 0$, $y = 0$, les dérivées partielles des *trois* premiers ordres sont les mêmes pour la surface et le paraboloïde, qui ont ainsi un contact du troisième ordre.

Lignes de pente. — L'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de pente est

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dy - \left(\frac{dz}{dy}\right) dx = 0.$$

Pour la surface que nous étudions, elle devient

$$\operatorname{tang} x . dy + \operatorname{tang} y . dx = 0,$$

et, en intégrant,

$$\sin x . \sin y = \text{constante}.$$

Quand la constante est nulle, on a

$$\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin y = 0;$$

par suite

$$x = n\pi \quad \text{ou} \quad y = n\pi.$$

Les projections des lignes de pente sont des parallèles aux axes Ox, Oy passant par les centres des carrés *blancs*.

Quand la constante est l'unité, les projections des lignes de pente se réduisent à un système de points isolés ayant pour coordonnées les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$.

La constante peut se représenter en général par $\sin^2 \alpha$; l'équation de la projection des lignes de pente devient

$$\sin x \sin y = \sin^2 \alpha;$$

elle représente une infinité de branches de courbes fermées ayant pour centres les sommets des carrés et pour axes de symétrie et pour normales les côtés et les diagonales des carrés. Il est à remarquer que la moitié seulement de chaque branche correspond à une ligne de pente, les deux quarts se trouvant sur des carrés *noirs*.

QUESTIONS.

---

618. La courbe parallèle à la podaire d'ellipse

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

a pour équation

$$(\alpha\beta-\gamma)^2=4(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha\gamma),$$

en posant

$$\alpha=\frac{(a^2+b^2)(x^2+y^2-k^2)-a^2b^2}{3a^2b^2(x^2+y^2-k^2)},$$

$$\beta=\frac{(x^2+y^2-k^2)^2+(a^2+b^2)k^2-a^2x^2-b^2y^2}{3a^2b^2(x^2+y^2-k^2)^2},$$

$$\gamma=\frac{k^2}{a^2b^2(x^2+y^2-k^2)^2}.$$

(Strebor.)

619. 1° La surface représentée par le système des trois équations

$$x=\frac{c^2-b^2}{bc}\,\frac{\mathrm{RR}'}{\mathrm{R}+\mathrm{R}'},$$

$$y=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}\,\frac{\mathrm{R}'\sqrt{b^2-\mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}+\mathrm{R}'},$$

$$z=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}\,\frac{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}'^2-c^2}}{\mathrm{R}+\mathrm{R}'}$$

est une cyclide; R, R′ sont les rayons de courbure de la surface au point x, y, z.

2° Supposons qu'une famille de courbes situées sur cette cyclide soit représentée par l'équation différentielle

$$p\,d\mathrm{R}+q\,d\mathrm{R}'=0,$$

les courbes, coupant orthogonalement celles du système donné, seront représentées par l'équation

$$\frac{d\mathrm{R}}{p\mathrm{R}(b^2-\mathrm{R}^2)}-\frac{d\mathrm{R}'}{q\mathrm{R}'(\mathrm{R}'^2-c^2)}=0.$$

3° L'équation en coordonnées elliptiques de la cyclide

dont il s'agit est

$$\rho + \mu + \nu = 0.$$

(STREBOR.)

620. On donne une courbe du troisième ordre ayant un point double et en ce point des tangentes perpendiculaires entre elles; les hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans cette courbe et dont les sommets de l'angle droit sont toujours au point double, passent par un même point de la courbe.

621. Une parabole, dont le foyer est F, est tangente aux deux côtés d'un angle droit YOX; on élève au point O une perpendiculaire à la droite OF; cette perpendiculaire rencontre la tangente au sommet de la parabole en un point F'. On demande de faire voir : 1° que la droite FF' est tangente en F à la courbe décrite par ce point, lorsque la parabole glisse sur son plan en restant tangente aux côtés de l'angle droit YOX; 2° que la courbe décrite par F', pendant ce mouvement, est semblable à la courbe décrite par F; 3° que la tangente F' C à la courbe décrite par le point F' rencontre la droite OF en un point C tel que $OF = 4OC$. (MANNHEIM.)

622. Toute surface conique qui, ayant son sommet au foyer d'une surface de révolution du second ordre, passe par une section plane quelconque de cette surface de révolution, est elle-même une surface conique de révolution; la droite qui joint le foyer au pôle du plan de la section faite dans la surface du second ordre est l'axe de la surface conique. (BOBILLIER.)

623. Une droite glisse sur deux autres non situées dans un même plan, de telle sorte que la partie interceptée entre elles soit constamment vue sous un angle

droit d'un certain point de l'espace; cette droite engendre une surface gauche du second ordre. (BOBILLIER.)

624. Un angle trièdre trirectangle mobile a son sommet en un point fixe pris sur une surface quelconque du second ordre, le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passe constamment par un même point de la normale issue du sommet fixe de l'angle trièdre. On demande le lieu de ce point, lorsque le sommet du trièdre parcourt la surface donnée. (MANNHEIM.)

SOLUTION DE LA QUESTION 614

(voir p. 126);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Désignons par F le foyer d'une ellipse donnée. En un point quelconque M de cette courbe menons la tangente MT qui coupe le petit axe en T; soit Q la projection du point T sur le rayon vecteur MF: on demande le lieu des points tels que Q, lorsque M décrit l'ellipse donnée.

(MANNHEIM.)

Soient x', y' les coordonnées du point M, on a

$$(1) \qquad a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2.$$

L'équation de la tangente en ce point est

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2,$$

qui, pour $x = 0$, donne $y = \frac{b^2}{y'}$, coordonnées du point T.

L'équation de la droite TQ est alors

$$(2) \qquad xx' + yy' = b^2 + cx,$$

et celle de FM

$$(3) \qquad yx' + (c - x)\,y' = cy.$$

Des équations (2) et (3), on tire

$$x' = c - b^2 \frac{c - x}{y^2 - cx + x^2}, \quad y' = \frac{b^2 y}{y^2 - cx + x^2}.$$

En portant dans l'équation (1), supprimant le facteur commun b^2 et développant les carrés, on a

$$\frac{a^2 b^2 y^2}{(y^2 - cx + x^2)^2} + c^2 + \frac{b^4 (c - x)^2}{(y^2 - cx + x^2)^2} - 2b^2 c \frac{c - x}{y^2 - cx + x^2} = a^2.$$

Je fais passer c^2 dans le second membre qui devient alors égal à b^2, lequel est facteur commun. Je le supprime, je chasse le dénominateur et fais tout passer dans le second membre

$$(y - cx + x^2) - 2c(x - c)(y^2 - cx + x^2)$$
$$- a^2 y^2 - b^2 (x - c)^2 = 0.$$

Résolvons par rapport à $y^2 - cx + x^2$,

$$y^2 - cx + x^2 = c(x - c) \pm \sqrt{c^2 (x - c)^2 + a^2 y^2 + b^2 (x - c)^2}.$$

Sous le radical, $(x - c)^2$ est facteur de $b^2 + c^2$, c'est-à-dire de a^2 que je fais alors sortir,

$$y^2 - cx + x^2 = c(x - c) \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Isolons le radical

$$(x - c)^2 + y^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

et élevons au carré

$$[(x-c)^2+y^2]^2 = a^2[(x-c^2)+y^2]$$

ou

$$[(x-c)^2+y^2][(x-c)^2+y^2-a^2]=0,$$

qui se dédouble en

$$(x-c)^2+y^2=0,$$

$$(x-c)^2+y^2=a^2.$$

La première de ces équations donne

$$x=c,\quad y=0,$$

c'est le foyer, solution évidemment étrangère, et la seconde représente un cercle de rayon a, demi grand axe, ayant pour centre le foyer.

SOLUTION DE LA QUESTION 614

(voir page 126);

PAR M. H. LEBASTEUR,
Élève du lycée Napoléon (classe de M. Vacquant).

On sait que

$$\text{FM} = a - \frac{c}{a}\,\text{MP},$$

MP étant l'abscisse du point M. D'après un théorème dû à Descartes, on a

$$\frac{\cos \text{QMT}}{\cos \text{TMP}} = \frac{c}{a}.$$

Or, des triangles PMT, TMQ, il résulte que

$$\frac{\cos \text{QMT}}{\cos \text{TMP}} = \frac{\text{MQ}}{\text{MP}};\quad \text{donc}\quad \text{MQ} = \frac{c}{a}\,\text{MP},\quad \text{et par suite}\quad \text{FQ} = a.$$

Ainsi le lieu géométrique du point Q est un cercle décrit du point F comme centre avec a pour rayon.

L'analyse donne aussi une solution très-simple de la question.

Prenant pour axes le grand axe et la parallèle au petit axe menée par le foyer, et désignant par ε le rapport $\frac{c}{a}$ et par γ la fonction $x-\frac{b^2}{c}$: l'équation de l'ellipse deviendra

$$x^2+y^2=\varepsilon^2\gamma^2.$$

Une tangente quelconque MT a pour équation

$$x\sin\varphi+y\cos\varphi=\varepsilon\gamma, \tag{1}$$

et la droite FM allant du foyer au point de contact :

$$x\cos\varphi-y\sin\varphi=0. \tag{2}$$

Soit $x=k$ l'équation d'une parallèle à l'axe des x.

L'équation générale des droites passant par le point de rencontre de cette dernière et de la tangente est

$$x\sin\varphi+y\cos\varphi-\varepsilon\gamma+\lambda\,(x-k)=0. \tag{3}$$

Déterminant λ de façon que (3) et (2) soient perpendiculaires l'une à l'autre, on trouve

$$\lambda=\varepsilon,$$

et alors on a, pour l'équation de la perpendiculaire TQ,

$$x\sin\varphi+y\cos\varphi=\frac{c}{a}\left(k-\frac{b^2}{c}\right). \tag{4}$$

Eliminant φ entre les équations (2) et (4), et cela en faisant la somme des carrés, on a l'équation du lieu

$$x^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(k-\frac{b^2}{c}\right)^2,$$

résultat conforme à celui que nous a fourni la géométrie.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'APOLLONIUS;

PAR UN ÉLÈVE DU LYCÉE NAPOLÉON.

La différence des carrés des diamètres conjugués d'une hyperbole est constante.

L'hyperbole rapportée à ses asymptotes Ox, Oy a pour équation $xy = k^2$. En un point quelconque M, (x, y) de la courbe, on mène la tangente MA qui rencontre en A l'asymptote Ox, et l'on prend le point P milieu de OA. Il s'ensuit

$$\text{MP} = y, \quad \text{OP} = \text{PA} = x.$$

Et en posant

$$\text{OM} = a', \quad \text{MA} = b', \quad yOx = \theta,$$

les triangles OMP, MPA donnent

$$a'^2 = y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta, \quad b'^2 = y^2 + x^2 - 2xy\cos\theta.$$

D'où

$$a'^2 - b'^2 = 4xy\cos\theta = 4k^2\cos\theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SOLUTION DES QUESTIONS AMÉRICAINES N°s 3 ET 5;

PAR M. H. DELORME.

Question 3.

Entre les deux relations

$$x\cos(\varphi + \alpha) + y\sin(\varphi + \alpha) = a\sin 2\varphi,$$
$$y\cos(\varphi + \alpha) - x\sin(\varphi + \alpha) = 2a\cos 2\varphi \ (*),$$

(*) C'est par erreur qu'il y a dans l'énoncé

$$y\cos(\varphi + \alpha) + x\sin(\varphi + \alpha) = 2a\cos 2\varphi.$$

on élimine φ. Démontrer que l'on obtient la relation

$$(y\sin\alpha + x\cos\alpha)^{\frac{2}{3}} + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Nous pouvons considérer la première équation comme représentant une droite variant de position pour les différentes valeurs de φ.

Remarquons que la seconde équation est précisément la dérivée par rapport à φ de la première. Eliminer φ entre ces deux équations revient donc à trouver l'enveloppe des droites représentées par la première. Changeons les axes des coordonnées et prenons pour nouveaux axes les axes rectangulaires définis, l'axe des x par l'équation

$$y\sin\alpha + x\cos\alpha = 0,$$

et l'axe des y par l'équation

$$y\cos\alpha + x\sin\alpha = 0.$$

Ce changement d'axes revient à faire tourner les axes de l'angle α et à changer le sens des y positifs. La première équation devient

$$\begin{gathered}(y\sin\alpha + x\cos\alpha)\cos(\varphi + \alpha)\\ + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)\sin(\varphi + \alpha) = a\sin 2\varphi.\end{gathered}$$

Cherchons l'ordonnée et l'abscisse à l'origine

$$\begin{aligned}y &= -2a\cos\varphi,\\ x &= 2a\sin\varphi,\\ x^2 + y^2 &= 4a^2.\end{aligned}$$

Les droites définies par l'équation précédente sont donc des droites dont la partie interceptée entre les deux axes est constante et égale $2a$. On sait que l'enveloppe de pareilles droites est

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

Revenant aux anciens axes, on obtient

$$(y \sin\alpha + x\cos a)^{\frac{2}{3}} + (x\sin\alpha - y\cos\alpha)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}},$$

ce qui est la relation demandée.

Question 5.

Les ellipses définies par l'équation

$$ax^2 + by^2 = 1,$$

dans laquelle a et b sont des variables assujetties à la relation $b - a = c$, sont coupées par la courbe

$$x = Ce^{-\frac{cy^2}{2}}$$

sous un angle dont la tangente est $\frac{y}{x}$ (*).

Soit V l'angle des deux tangentes aux courbes au point commun x, y; soient α et α' les angles des tangentes avec l'axe des x. On a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\alpha'}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{ax}{by}.$$

Pour avoir $\operatorname{tang}\alpha'$, remarquons que l'équation de la courbe donnée peut s'écrire

$$Lx + \frac{cy^2}{2} - LC = 0,$$

(*) L'énoncé était encore inexact : il y a $a - b = c$ et $\frac{x}{y}$ au lieu de $b - a = c$ et de $\frac{y}{x}$.

$$\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{-\frac{1}{x}}{cy} = -\frac{1}{cxy},$$

$$\operatorname{tang}V = \frac{-\frac{ax}{by}+\frac{1}{cxy}}{1+\frac{ax}{bcxy^2}} = \frac{y}{x}\,\frac{b-acx^2}{a+bcy^2},$$

$$\operatorname{tang}V = \frac{y}{x}\,\frac{b-acx^2-a-bcy^2+a+bcy^2}{a+bcy^2}.$$

Mais le point x, y étant sur l'ellipse,

$$acx^2+bcy^2 = c,$$

$$\operatorname{tang}V = \frac{b-a-c+a+bcy^2}{a+bcy^2}\,\frac{y}{x},$$

et comme $b-a=c$,

$$\operatorname{tang}V = \frac{y}{x}.$$

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 609

(voir p. 31);

PAR MM. MAHUET ET DELAFOND,
Élèves de spéciales du lycée de Lyon.

Ire Solution. — La droite Rr est la polaire du point C par rapport au cercle $Ff'fF'$ décrit sur FF' comme dia-

mètre. Donc

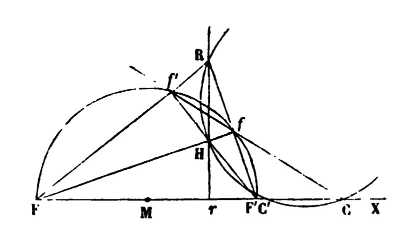
$$MC.Mr = \overline{MF'}^2$$

ou

$$(Mr + rC)\,Mr = \overline{MF'}^2$$

$$Mr.rC = \overline{MF}^2 - \overline{Mr}^2$$

$$= (MF + Mr)(MF - Mr) = Fr.rF'.$$



Or, d'après un théorème de géométrie, on a

$$rH.Rr = Fr.rF';$$

de plus

$$rH.rR = rC'.rC,$$

C′ étant le second point de rencontre du cercle (R, H, C) avec FF′.

On aura donc

$$Mr.rC = rC'.rC;$$

on en déduit

$$rC' = Mr.$$

Reprenant l'égalité

$$MC.Mr = \overline{MF'}^2,$$

on en tire

$$2Mr.MC = 2\overline{MF'}^2,$$

$$MC'.MC = 2\overline{MF'}^2 = \frac{\overline{FF'}^2}{2}.$$

Donc toutes les tangentes issues de M sont d'une longueur constante $= \frac{FF'}{\sqrt{2}}$.

IIe Solution, par l'analyse. — Soient pris pour axes rR et rF'; soient p et p' les abscisses de F et de F', q l'ordonnée de R. Les droites FR, F'R auront pour équations

$$\text{FR} \left| \frac{y}{q} + \frac{x}{p'} = 1, \quad \text{F'R} \right| \frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1.$$

Pour trouver l'équation de ff', prenons une combinaison linéaire du cercle décrit sur FF' comme diamètre et du système des deux droites FR et F'R.

$$\left(\frac{y}{q} + \frac{x}{p'} - 1\right)\left(\frac{y}{q} + \frac{x}{p} - 1\right) = 0$$

est l'équation du système des deux droites, qui peut s'écrire

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} pp'y^2 + q^2x^2 + (p+p')qyx \\ -2pp'qy - (p+p')q^2x + pp'q^2 \end{array} \right\} = 0.$$

L'équation du cercle décrit sur FF' est

$$\left(x - \frac{p+p'}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p-p'}{2}\right)^2$$

ou

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - (p+p')x + pp' = 0.$$

Multiplions l'équation (2) par q^2 et retranchons de l'équation (1), nous aurons

$$y^2(q^2 - pp') - xy(p+p')q + 2pp'q.y = 0,$$

qui nous donne

$$y = 0$$

et

$$(3) \qquad y(q^2 - pp') - x(p+p')q + 2pp'q = 0.$$

Cette dernière équation est l'équation de ff'.

Les coordonnées de C seront

$$y = 0, \quad x = \frac{2pp'}{p+p'}.$$

L'équation générale du cercle (R, H, C) sera

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Pour avoir la puissance de ce cercle sur le point M, il suffira de substituer dans cette équation les coordonnées de M, ce qui donnera

$$\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \overline{\frac{p+p'}{2}}\,A + C.$$

Reste à calculer A et C.

En faisant $x = 0$ dans l'équation du cercle, nous aurons

$$C = Rr.rH = -pp'.$$

Si l'on fait $y = 0$, l'abscisse de C étant $\frac{2pp'}{p+p'}$, celle de C' sera $-\frac{pp'}{\left(\frac{2pp'}{p+p'}\right)} = -\frac{p+p'}{2}$. On aura

$$-A = -\frac{p+p'}{2} + \frac{2pp'}{p+p'} = -\frac{(p-p')^2}{2(p+p')}.$$

Donc la puissance du cercle sur M sera

$$\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \frac{(p+p')}{2}\,\frac{(p-p')^2}{2(p+p')} - pp'$$

$$= \left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-p'}{2}\right)^2 - pp'$$

$$= 2\left(\frac{p-p'}{2}\right)^2 = 2.\overline{MF}^2 = \frac{\overline{FF'}^2}{2}.$$

On retrouve ainsi le même résultat que précédemment.

SOLUTION DE LA QUESTION 594 PROPOSÉE PAR SIR WILLIAM HAMILTON (*)

(voir t. XX, p. 216);

PAR M. G. DE SAINT-MICHEL,
Élève de spéciales à l'École préparatoire des Carmes.

Le point P étant le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC, il y a quatre cercles tangents aux côtés de chacun des triangles PAB, PAC, PBC; prouver que le cercle des neuf points du triangle ABC est tangent à ces douze cercles.

Solution. — Soient A', B', C' (**) les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC; soient D, E, F les milieux respectifs des distances AP, BP, CP; le cercle des neuf points du triangle ABC passe par ces six points qui sont en même temps les milieux des côtés des triangles PAB, PAC, PBC; par conséquent, ce cercle est aussi le cercle des neuf points de chacun de ces triangles. Or on a démontré (*Nouvelles Annales*, t. Ier) que « le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles ex-inscrits »; par conséquent le cercle des neuf points du triangle ABC est tangent aux douze cercles inscrits ou ex-inscrits aux triangles PAB, PAC, PBC.

C. Q. F. D.

Remarque. — On sait que le rayon du cercle des neuf points d'un triangle est égal à la moitié du rayon du

---

(*) Ce nom illustre manque dans la Biographie Poggendorff.

(**) On est prié de faire la figure.

cercle circonscrit. Il résulte de ceci et de ce qui vient d'être démontré, que le rayon du cercle circonscrit à chacun des triangles formés en joignant le point d'intersection des hauteurs aux trois sommets est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle primitif.

NOTE SUR DEUX SUITES RÉCURRENTES DE CERCLES ET DE SPHÈRES;

PAR M. PAUL SERRET.

---

1. THÉORÈME. — *Étant donnés dans le plan deux cercles fixes intérieurs, on trace un premier cercle quelconque, tangent aux deux cercles fixes; un second cercle tangent au premier et aux deux cercles fixes; un troisième cercle tangent au second et aux deux cercles fixes, et ainsi de suite. Cela posé, si le système de ces cercles se ferme une fois, par un* $n^{\text{ième}}$ *cercle tangent au* $(n-1)^{\text{ième}}$ *et au premier, il se fermera toujours, et par le même nombre de cercles, quel que soit le cercle initial.* (STEINER.)

Ire Démonstration. — On peut, à l'aide des lemmes suivants, ramener ce théorème à celui de M. Poncelet.

Lemme I. — Le lieu décrit par le centre d'un cercle tangent à deux cercles fixes est une courbe du second degré.

Lemme II. — Le lieu décrit par le point de mutuel contact de deux cercles variables, tangents entre eux et à deux cercles fixes, est un cercle; et la droite des centres

des deux cercles variables est tangente au cercle décrit par leur point de contact.

Si, en effet, on applique aux deux cercles fixes la transformation par rayons vecteurs réciproques, on obtient : soit deux cercles fixes concentriques, soit deux droites fixes qui se coupent ; et tous les systèmes de deux cercles variables tangents à ces deux cercles, ou à ces deux droites fixes, et tangents entre eux. Mais, dans la figure transformée, le lieu décrit par le point de mutuel contact des deux cercles variables est un cercle dans le premier cas, une droite dans le second ; et ce cercle, ou cette droite, coupe *orthogonalement* les cercles variables. Donc, etc.

Revenant maintenant au théorème de M. Steiner, considérons un système *fermé*, composé de n cercles successifs ; et le polygone auxiliaire ayant pour premier, second,..., et $n^{ième}$ sommets, le centre du premier, second,..., et $n^{ième}$ cercles.

Ce polygone, d'après les lemmes I et II, se trouvera simultanément *inscrit* dans la courbe du second degré, lieu des centres de tous les n cercles ; et *circonscrit* au cercle, lieu des points de mutuel contact de tous ces cercles successifs. Le théorème de M. Poncelet est donc applicable ; tous les polygones qu'on essayera de former de la même manière se fermeront d'eux-mêmes, par le même nombre de côtés ; et, par suite, tous les systèmes de cercles que l'on essayera de former, sous les mêmes conditions que le précédent, se fermeront d'eux-mêmes et par le même nombre de cercles.

IIe Démonstration. — La transformation par rayons vecteurs réciproques appliquée aux cercles fixes donnés, intérieurs, les change en deux cercles *concentriques*, pour lesquels le théorème énoncé devient évident.

Quant à la relation qui doit exister entre les rayons et la distance des centres des deux cercles fixes, pour que la figure se ferme par n cercles et après n' révolutions autour du plus petit de ces deux cercles, on parvient aisément par la même méthode à cette formule

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{n'}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{\mathrm{R}.d}{r.\mathrm{D}}},$$

R, r désignant les rayons des deux cercles et D, d les distances de leurs centres au *point central* de ces cercles. Cette formule est sans doute équivalente à celle qui a été donnée par M. Steiner.

2. Théorème. — *Étant données dans l'espace trois sphères fixes, on imagine une première sphère quelconque tangente aux trois sphères fixes; une seconde sphère tangente à la première et aux trois sphères fixes; et ainsi de suite, jusqu'à une $n^{ième}$ sphère tangente à la $(n-1)^{ième}$ et aux trois sphères fixes. Cela posé, si le système de ces sphères se ferme une fois, ou si la $n^{ième}$ sphère se trouve tangente à la première; la même particularité se produira toujours, et par le même nombre de sphères, quelle que soit la sphère initiale.*

La démonstration repose sur le théorème de M. Poncelet, associé aux lemmes suivants :

Lemme I. — Le lieu décrit par le centre d'une sphère tangente à trois sphères fixes est une courbe du second degré (Dupuis, Ch. Dupin).

Lemme II. — Le lieu décrit par le point de mutuel contact de deux sphères variables, tangentes entre elles et à *deux* sphères fixes, est une *sphère;* et la droite des centres des deux sphères variables est tangente à la sphère décrite par leur point de contact.

Même procédé de démonstration que pour le lemme II du numéro précédent.

Lemme III. — Le lieu décrit par le point de mutuel contact de deux sphères variables, tangentes entre elles et à *trois* sphères fixes, est un *cercle*; et la droite des centres des deux sphères variables est tangente au cercle décrit par leur point de contact.

Conséquence du lemme II.

Revenant au théorème énoncé, considérons un système fermé, composé de n sphères, et le polygone plan auxiliaire ayant pour sommets successifs les centres successifs de ces sphères.

Ce polygone, d'après les lemmes I et III, se trouvera simultanément *inscrit* dans la courbe du second degré, lieu des centres de toutes les n sphères, et *circonscrit* au cercle, lieu des points de mutuel contact de toutes ces sphères successives. D'ailleurs, le plan du cercle et celui de la courbe du second degré coïncident, le théorème de M. Poncelet est encore applicable; et tous les polygones qu'on esssayera de former de la même manière se fermeront d'eux-mêmes, ainsi que tous les systèmes de sphères que l'on pourra imaginer sous les mêmes conditions.

Remarque. — M. Steiner a énoncé un théorème analogue par le système des sphères tangentes à *deux* sphères fixes. La question, dans ce cas, ne paraît-elle pas indéterminée?

NOTE SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

L'équation

$$fx = 0$$

étant donnée, si x en est une racine comprise entre deux nombres α et β qui soient des collections d'unités du même ordre que $\frac{1}{10^n}$ ($n \gtrless 0$ entier), et qu'on puisse par l'expression $\alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha}$ ou par $\beta - \frac{f\beta}{f'\beta}$ gagner $n + p$ nouveaux chiffres sans que l'erreur atteigne une unité du dernier ordre, qu'arrive-t-il quand on substitue à l'équation $fx = 0$ une transformée $\varphi y = 0$ due au changement de x en ty?

Soit

$$fx = f(ty) = \varphi y.$$

On aura

$$f'x = \varphi' y \cdot \frac{1}{t}, \quad f''x = \varphi'' y \cdot \frac{1}{t^2};$$

d'où il suit que si $f'x$ varie dans un même sens et ne s'annule pas, il en est de même de $\varphi' y$ pour les valeurs de y correspondantes à celles de x, que si fx et $f''x$ sont de même signe, φy et $\varphi'' y$ sont également de même signe.

En conséquence, si l'on pose

$$\alpha = t\alpha', \quad \beta = t\beta',$$

quand les premières conditions à remplir pour une bonne application de la méthode de Newton seront satisfaites à

l'égard de α et de β, elles auront lieu pour l'équation $\varphi y = 0$ à l'égard de α' et de β'.

Soit

$$a = \alpha + h.$$

Comme

$$0 = f\alpha + hf'\alpha + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha + \theta h) \quad \left(\theta \begin{array}{l} > 0 \\ < 1 \end{array}\right),$$

on aura

$$a = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha} + \omega,$$

avec

$$\omega = -\frac{h^2}{1.2} \frac{f''(\alpha + \theta h)}{f'(\alpha)}.$$

Supposons $f\alpha$ et $f''\alpha$ de même signe.

Les conditions connues étant remplies, on aura

$$\omega > 0.$$

On considère alors la fraction $-\frac{f''x}{2f'x}$; on évalue un maximum A des valeurs numériques de son numérateur dans l'intervalle de α à β, un minimum $2b$ de celui de son dénominateur.

De là

$$\omega < \frac{A}{2b} h^2,$$

de sorte que si

$$\beta - \alpha = \frac{1}{10^n} \quad \text{et} \quad \frac{A}{2b} < \frac{1}{10^p} \quad (p \text{ entier} \gtrless 0),$$

on a

$$\omega < \frac{1}{10^{2n+p}}.$$

On en conclut, comme on le sait, que si $n + p > 0$, il

suffit d'évaluer $-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ jusqu'à l'ordre $\frac{1}{10^{2n+p}}$, d'augmenter le résultat d'une unité de son dernier ordre, pour obtenir un nombre h_1 tel que $\alpha + h_1$ est une valeur approchée de a à une unité près de l'ordre de son dernier chiffre. On décide par une substitution dans fx si l'erreur est par défaut ou par excès. On a gagné ainsi $n+p$ chiffres.

Cela rappelé, si l'on pose

$$a = fa', \quad a' = \alpha' + h',$$

on aura

$$a = \alpha' - \frac{\varphi\alpha'}{\varphi'\alpha'} + \omega',$$

avec

$$\omega' = -\frac{\varphi''(\alpha + \theta' h')}{2\varphi'\alpha'} h'^2.$$

Considérons la fraction $-\frac{\varphi'' y}{2\varphi' y}$ en faisant varier y de α' à β'. Le maximum des valeurs absolues de son numérateur correspondra à celui de $f''x$ et sera At^2 à cause de $\varphi'' y = t^2 f'' x$, puis le minimum de celles de $\varphi' y$ sera bt.

De là

$$\omega' < \frac{At^2}{2bt} h'^2,$$

et puisqu'on a

$$h = a - \alpha = ta' - t\alpha' = th',$$

il s'ensuit

$$\omega' < \frac{Ah^2}{2b} \cdot \frac{1}{t} < \frac{1}{10^{2n+p}} \cdot \frac{1}{t}$$

Supposons d'abord que t soit 10^q ($q \gtrless 0$ entier). Alors l'expression de α' ne différera de celle de α que par la position d'une virgule.

On aura

$$\beta' - \alpha' = \frac{\beta - \alpha}{t} \doteq \frac{1}{10^{n+q}},$$

$$\omega' < \frac{1}{10^{2n+p+q}}.$$

Le calcul de $-\frac{\varphi\alpha'}{\varphi'\alpha'}$ devra donc se pousser jusqu'à l'ordre $\frac{1}{10^{2n+p+q}}$. On gagnera donc $n+p$ chiffres, les mêmes que dans le calcul de a en partant de α, et ainsi de suite en continuant.

L'emploi de la transformée ne pourra donc ni faire perdre, ni faire gagner, au moins pour la rapidité de l'approximation.

Pour étendre cela à toute valeur de t, prenons l'erreur relative qui concerne h quand $-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ en est la valeur approchée.

La fin prochainement.

ADDITION A L'ARTICLE DE LA PAGE 80;

PAR M. VINCENZO JANNI.

Les équations des perpendiculaires à deux côtés opposés du quadrilatère dans les points milieux sont

$$y - \frac{h}{2}\left(\sin\varphi - \sin\frac{1}{3}\varphi\right)$$
$$= \frac{a}{h}\tang\frac{1}{3}\varphi\left[x - \frac{a}{2}\left(\cos\varphi + \cos\frac{1}{3}\varphi\right)\right],$$

$$y - \frac{h}{2}\sin\frac{1}{3}\varphi = -\frac{a}{h}\tang\frac{1}{3}\varphi\left(x + \frac{a}{2}\cos\frac{1}{3}\varphi\right).$$

Ces deux équations donnent

$$x = \frac{c^2}{4a}\cos\varphi, \quad y = -\frac{c^2}{4h}\sin\varphi,$$

qui sont les coordonnées du centre, et l'équation du cercle sera

$$y^2 + x^2 + \frac{c^2}{2h}y\sin\varphi - \frac{c^2}{2a}x\cos\varphi = \frac{a^2 + h^2}{2}$$

ou

$$y^2 + x^2 + \frac{c^2}{2h^2}qy - \frac{c^2}{2a^2}px = \frac{a^2 + h^2}{2}.$$

Ce cercle rencontre celui qui est circonscrit à l'ellipse

$$x^2 + y^2 = a^2$$

dans les mêmes points où ce dernier est rencontré par la droite

$$\frac{px}{a^2} - \frac{qy}{h^2} = 1,$$

et qui représente la tangente à l'ellipse dans le point où l'ordonnée au point donné p, q rencontre de nouveau la courbe. Le cercle cherché est donc celui qui passe par ces trois points.

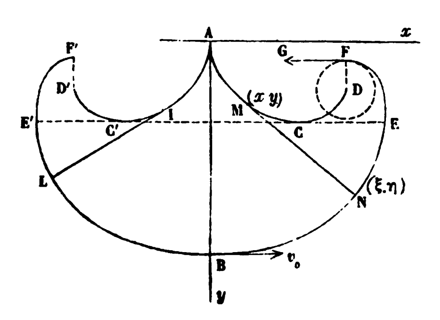
Cette construction nous fournit un moyen assez simple pour diviser un angle donné en trois parties égales en nous servant d'une ellipse. Il suffirait de construire un angle AOB égal à l'angle donné, et la circonférence qui passe par les trois points M, P, Q donnerait les trois solutions.

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES (ANNÉE 1845);

PAR M. DIEU,
Agrégé, Docteur ès Sciences.

Composition de Mécanique.

« Un point matériel pesant m est suspendu par un fil
» flexible, inextensible et sans masse à un point fixe A;
» ce pendule est mis en mouvement dans un plan verti-
» cal où le fil s'enroule sur une courbe passant par le
» point A et touchant en ce point la verticale. Quelle
» doit être cette courbe pour que la tension du fil soit
» constante pendant un certain temps? Quelles sont les
» lois du mouvement, et pourra-t-il être oscillatoire! On
» donne la longueur l du fil et la vitesse v_0 du mobile m
» au point le plus bas B de la trajectoire. »



I. Soient :

ACD la courbe demandée et BEF la développante qui est décrite par le point m;

s la longueur d'un arc AM de ACD;

N la position de m lorsque le fil est appliqué sur AM;

x, y les coordonnées de M; ξ, η celles de N; g la gravité.

Le principe de Leibnitz donne

$$(1) \qquad v^2 = v_0^2 + 2g(\eta - l).$$

La force centrifuge rapportée à l'unité de masse est $\frac{v^2}{l-s}$ en N, car le rayon de courbure de BEF en ce point est $l-s$; la composante de la gravité suivant le prolongement de la partie droite MN du fil est d'ailleurs $g\frac{dy}{ds}$; on doit donc avoir d'après l'énoncé, du moins pendant un certain temps,

$$(2) \qquad \frac{v^2}{l-s} + g\frac{dy}{ds} = kg,$$

k désignant un coefficient constant. Pour que cette équation s'applique quand le mobile est en B, le coefficient k doit être déterminé d'après

$$\frac{v_0^2}{l} + g = kg,$$

d'où

$$k = 1 + \frac{v_0^2}{gl}:$$

ainsi k surpasse 1.

Enfin y, η et s sont évidemment liés par

$$(3) \qquad \frac{\eta - y}{l-s} = \frac{dy}{ds}.$$

Remplaçant dans l'équation (2) v^2 par son expression immédiatement donnée par l'équation (1), η par son expression $y + (l-s)\frac{dy}{ds}$ tirée de l'équation (3), puis v_0^2

par $gl(k-1)$, on obtient

$$3(l-s)\frac{dy}{ds}+2y+ks-3l=0.$$

Cette équation rentre dans un type connu ; son intégrale est

$$y=\frac{3-k}{2}l+a(l-s)^{\frac{2}{3}}-k(l-s),$$

a désignant une constante arbitraire. Il ne reste qu'à déterminer a de manière que y soit nulle en même temps que s pour avoir en fonction de s l'y de la courbe demandée :

(4) $$y=\frac{3-k}{2}l+\frac{3}{2}(k-1)l^{\frac{1}{3}}(l-s)^{\frac{2}{3}}-k(l-s),$$

d'où

(5) $$\frac{dy}{ds}=k-(k-1)\sqrt[3]{\frac{l}{l-s}}.$$

La forme et l'étendue de ACD se déduisent facilement de ces deux formules :

1° s augmentant depuis zéro jusqu'à

$$\left[1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^3\right]l=s',$$

$\frac{dy}{ds}$ diminue à partir de 1, y augmente à partir de 0, et pour $s=s'$, on a

$$\frac{dy}{ds}=0,\quad y=\frac{3k-1}{2k^2}l=y'.$$

Donc ACD a d'abord un arc AC de longueur s', convexe vers Ay, dont la tangente en C est parallèle à Ax, c'est-à-dire horizontale.

2° s augmentant encore depuis s' jusqu'à

$$\left[1-\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^3\right]l=s'',$$

$\frac{dy}{ds}$ continue de décroître en prenant des valeurs négatives, y qui a été en croissant jusqu'à y', décroît à partir de cette valeur, et pour $s=s''$ on a

$$\frac{dy}{ds}=-1,\quad y=\frac{8kl}{(k+1)^3}=y''.$$

La courbe ACD a donc encore un arc CD de longueur $s''-s'$ se raccordant avec AC, concave vers Ay, et dont la tangente en D est parallèle à cet axe.

On ne peut pas donner à s des valeurs supérieures à s'', car il y répondrait, d'après la formule (5), des valeurs de $\frac{dy}{ds}$ inférieures à -1, ce qui, à cause de la signification géométrique de ce rapport différentiel, équivaut à une *imaginarité algébrique; D est donc un point d'arrêt.* On ne peut pas non plus donner à s des valeurs négatives, car il y répondrait des valeurs de $\frac{dy}{ds}$ supérieures à 1. Mais il est clair que les équations (4) et (5) sont vérifiées par l'y et l's de l'arc AC′D′ symétrique de ACD par rapport à Ay, pourvu qu'on regarde s comme croissant aussi de O à s'' sur cet arc en partant de A.

Afin de construire la courbe par points, on exprimera x et y en fonction d'une même variable auxiliaire. D'après la formule (5)

$$dx=\pm ds\sqrt{1-\left[k-(k-1)\left(\frac{l}{l-s}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2}.$$

Posant

$$\frac{l-s}{l} = z^3, \tag{6}$$

d'où

$$ds = -3lz^2\,dz,$$

on a

$$dx = \mp 3l\sqrt{k-1}\,zdz\sqrt{-(k+1)z^2+2kz-(k-1)},$$

ou, par une transformation très-simple,

$$dx = \pm\frac{2l\sqrt{k-1}}{k+1}\Big[dz(-\overline{k+1}.z+k)\sqrt{-(k+1)z^2+2kz-(k-1)}$$
$$-k\,dz\sqrt{-(k+1)z^2+2kz-(k-1)}\Big].$$

L'intégrale de la première partie du facteur entre les crochets est

$$\frac{1}{3}[-(k+1)z^2+2kz-(k-1)]^{\frac{3}{2}} + \text{const.}$$

Pour intégrer la seconde partie qui revient à

$$-kdz\sqrt{k+1}\sqrt{\frac{1}{(k+1)^2}-\left(z-\frac{k}{k+1}\right)^2},$$

on posera

$$z - \frac{k}{k+1} = \frac{\sin\varphi}{k+1}. \tag{7}$$

Cette partie est ramenée ainsi à $-\dfrac{k}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\cos^2\varphi\,d\varphi$, dont l'intégrale facile à trouver est

$$-\frac{k}{2(k+1)^{\frac{3}{2}}}(\sin\varphi\cos\varphi+\varphi)+\text{const.}$$

Enfin par la substitution à z de son expression tirée de

la formule (7), la première intégrale prend la forme très-simple $\frac{\cos^3\varphi}{3(k+1)^{\frac{3}{2}}}$ + const. On a donc

$$x = \text{const.} \pm \frac{l\sqrt{k-1}}{(k+1)^{\frac{5}{2}}}\left[\cos^3\varphi - \frac{3k}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)\right].$$

Pour déterminer la constante, on remarquera que la formule (6) donne $z = 1$ pour $s = 0$, la formule (7) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour $z = 1$, d'où il suit que $x = 0$ doit répondre à $\varphi = \frac{\pi}{2}$: d'après cela il vient finalement

$$(8) \quad x = \pm \frac{l\sqrt{k-1}}{(k+1)^{\frac{5}{2}}}\left[\cos^3\varphi - \frac{3k}{4}\sin 2\varphi + \frac{3k}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right].$$

Les expressions de y et de $\frac{dy}{ds}$ en fonction de l'auxiliaire φ s'obtiennent par la substitution dans les équations (4) et (5), de la valeur de $l - s$ déduite des formules (6) et (7), savoir : $\left(\frac{k+\sin\varphi}{k+1}\right)^3 l$. On arrive ainsi à

$$(9) \quad y = \frac{l}{2(k+1)^3}[8k - 6k\sin\varphi + 3(k^2+1)\cos^2\varphi - 2k\sin^3\varphi],$$

$$(10) \quad \frac{dy}{ds} = \frac{k\sin\varphi + 1}{k + \sin\varphi}.$$

Nous venons de voir que $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en A. Pour les points D et D′ où $s = s''$, on a $z = \frac{k-1}{k+1}$ d'après la formule (6), partant $\varphi = \frac{\pi}{2}$ d'après la formule (7) ; les coordonnées des points intermédiaires et le cosinus de l'angle que la

tangente fait avec Ay se déduiront donc des trois formules précédentes en attribuant à φ des valeurs comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. On a pour les points extrêmes D, D'

$$x = \pm \frac{3k\pi l\sqrt{k-1}}{2(k+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

II. Les équations (3), (4) et (5) donnent

$$\eta = \frac{3-k}{2} l + \frac{1}{2}(k-1) l^{\frac{1}{3}} (l-s)^{\frac{2}{3}}.$$

Substituant cette expression à η dans l'équation (1) et ayant égard à ce que $v_0^2 = gl(k-1)$, on trouve

$$(11) \qquad v = v_0 \sqrt[3]{\frac{l-s}{l}}.$$

D'après cette formule, v diminue à mesure que s augmente, comme cela doit être, et est égale à $\frac{v_0(k-1)}{k+1}$ pour $s = s''$.

Si l'on remplace v par son expression dans celle de la force centrifuge $\frac{v^2}{l-s}$, on a $\frac{v_0^2}{\sqrt[3]{l^2(l-s)}}$, d'où gk pour $s = s'$ et $g(k+1)$ pour $s = s''$. Ainsi $\frac{v^2}{l-s}$ augmente avec s, c'est-à-dire en même temps que la composante de la gravité suivant la partie rectiligne du fil diminue, devient égale à gk pour la position du système où cette composante serait nulle, enfin supérieure à gk pour les positions où elle ne serait plus dirigée suivant le prolongement du fil.

Il résulte évidemment de ces remarques qu'à un certain moment une partie du fil de longueur s'' sera ap-

pliquée sur l'arc ACD, et que le reste du fil sera alors vertical en DF. La première partie du fil restant sur ACD, et rien n'arrêtant le mouvement de m parvenu au point d'arrêt F de BEF, il doit, en vertu de sa vitesse acquise, dirigée suivant FG parallèle à Ax, se mettre à décrire la circonférence de rayon $DF = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^3 l$ dont D est le centre; mais *la tension du fil deviendra aussitôt variable.* On ne peut rien dire de plus sur le mouvement sans ajouter quelque condition à celles de l'énoncé, ce que nous nous abstiendrons de faire; dans ces conditions, *le mouvement n'est pas oscillatoire.*

La vitesse donnée v_0, que le mobile a en B, peut lui avoir été imprimée dans cette position; mais elle peut aussi être acquise dans un mouvement antérieur. Si, par exemple, une partie quelconque du fil de longueur s_1 (s_1 doit être moindre que s'') était d'abord appliquée sur l'arc $AI = s_1$ de la courbe AC′D′, symétrique de ACD par rapport à Ay, et si le reste du fil était dirigé suivant la tangente IL à cette courbe, en imprimant à m la vitesse $v_0 \sqrt[3]{\frac{l-s_1}{l}}$ suivant la tangente en L à BE′F′, symétrique de BEF, ce point matériel acquerrait la vitesse v_0 après avoir parcouru LB [η_1 désignant l'ordonnée de L, on a

$$\eta_1 = \frac{3-k}{2} l + \frac{1}{2}(k-1) l^{\frac{1}{3}} (l - s_1)^{\frac{2}{3}},$$

ce qui réduit effectivement

$$v_0^2 \left(\frac{l-s_1}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + 2g(l-\eta_1) \quad \text{à} \quad gl(k-1) = v_0^2].$$

Dans ce cas la tension du fil serait égale à gk depuis le commencement du mouvement.

Il ne nous reste plus qu'à chercher le temps que le mobile m met à parcourir une partie quelconque de sa trajectoire. Considérons l'arc BN commençant au point le plus bas B de cette courbe, et soit t le temps employé à le décrire.

De

$$\xi - x = (l - s)\frac{dx}{ds}, \quad \eta - y = (l - s)\frac{dy}{ds},$$

on tire

$$\frac{d\xi}{dt} = (l - s)\frac{d^2x}{ds^2}\frac{ds}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = (l - s)\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dt},$$

en remarquant que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Remplaçant $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ par ces valeurs dans

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2,$$

on a

$$v^2 = (l - s)^2\frac{ds^2}{dt^2}\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right].$$

Mettant au lieu de $\frac{d^2x}{ds^2}$ sa valeur $-\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} : \frac{dx}{ds}$, réduisant au moyen de $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$, et extrayant les racines carrées, on obtient

$$v = \pm (l - s)\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dt} : \frac{dx}{ds},$$

formule générale assez remarquable de la vitesse d'un mobile en fonction des coordonnées de la développée de sa trajectoire.

Nous appliquerons cette formule à notre problème en faisant usage de la variable auxiliaire φ déjà employée; elle a, comme on va le voir, l'avantage de conduire à une expression de dt immédiatement intégrable. Les formules (6), (7) et (11) donnent

$$\frac{l-s}{s} = \left(\frac{k+\sin\varphi}{k+1}\right)^3, \quad v = v_0\,\frac{k+\sin\varphi}{k+1};$$

on tire de la formule (10) par différentiation

$$\frac{d^2y}{ds^2} = (k^2-1)\,\frac{\cos\varphi}{(k+\sin\varphi)^2}\,\frac{d\varphi}{ds},$$

et de l'expression de dx en fonction de s par substitution à $\frac{l-s}{l}$ de la valeur précédente

$$\frac{dx}{ds} = \pm\sqrt{k^2-1}\cdot\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}.$$

Portant toutes ces valeurs dans la formule générale ci-dessus, et remplaçant v_0 par $gl(k-1)$, on obtient, en résolvant par rapport à dt,

$$dt = \pm\frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}\,(k+\sin\varphi)\,d\varphi,$$

où il faut prendre le signe inférieur pour que dt soit positif, car φ décroît à partir de $\frac{\pi}{2}$. De là résulte

$$t = \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[k\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+\cos\varphi\right],$$

la constante introduite par l'intégration ayant été déterminée de manière que t soit nul pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ qui répond au point B.

Enfin pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, on a le temps $\frac{k\pi}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{l}{g}}$ que le mobile mettra à décrire BEF. D'après ce qui a été dit plus haut, la tension du fil pourrait rester constante pendant une durée double.

Note.— On trouvera dans le t. V, p. 525, une solution dont la précédente diffère assez notablement.

Questions analogues.

I. « Déterminer la courbe située dans un plan vertical » sur laquelle un point matériel pesant descendrait en » exerçant dans toutes les positions une pression égale à » son poids. On fait abstraction du frottement. »

En prenant l'axe des x vertical et dans le sens opposé à la pesanteur, on arrive sans difficulté à l'équation

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{y'\,dy'}{1+y'^2} = \frac{g\,dx}{2gx-c},$$

y' désignant le rapport différentiel $\frac{dy}{dx}$, g la gravité et c une constante à déterminer d'après la vitesse du mobile dans une certaine position. L'intégrale de cette équation est

$$x = \mathrm{A}\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)^2(1+y'^2) + \frac{c}{2g},$$

A étant une constante arbitraire. De là et de

$$y = xy' - \int x\,dy',$$

on déduit

$$y = \left(x - \frac{c}{2g}\right)y' - \mathrm{A}\int\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right)^2(1+y'^2)\,dy'.$$

Si l'on pose $y' = \tang\varphi$, l'intégrale comprise dans cette équation se ramène à $\int \frac{(1+\sin\varphi)^2 d\varphi}{\cos^6\varphi}$ qui s'obtient par une formule connue, et on a en fonction de la variable auxiliaire φ

$$y = \left(x - \frac{c}{2g} - \frac{2A}{5}\right)\tang\varphi - \frac{A}{5}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} - \frac{2A}{5}\frac{1+\sin\varphi}{\cos^5\varphi} + B,$$

$$x = \frac{c}{2g} + A\frac{(1+\sin\varphi)^2}{\cos^4\varphi},$$

B désignant encore une constante arbitraire qui sera déterminée ainsi que A par une position du mobile et la direction de sa vitesse dans cette position.

II. « Déterminer la courbe située dans un plan ver-
» tical, telle qu'il y ait un rapport constant entre la pres-
» sion exercée sur cette courbe par un point matériel
» astreint à la décrire, et la force centrifuge due au mou-
» vement. On fait abstraction du frottement. »

L'origine des axes étant sur la courbe et l'axe des y dirigé dans le sens de la pesanteur, en désignant la gravité par g, la vitesse du point matériel à l'origine par a, l'angle que la direction de cette vitesse fait avec l'axe des x par α, et le rapport constant par k, on a

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = g\frac{dy}{dt}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2gy + a^2,$$

et

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \mu\frac{dx}{dt},$$

où μ tient lieu de $\frac{g}{1 \pm k}$. Par l'élimination de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ entre ces équations on obtient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu - g}{2gy + a^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \mu,$$

qui se ramène à une équation linéaire en posant

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{z}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{dy}.$$

L'intégrale assujettie aux conditions du problème est

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2gy + a^2 - a^{\frac{2\mu}{g}} \cos^2\alpha.(2gy + a^2)^{1-\frac{\mu}{g}}.$$

De cette équation et de la seconde de celles qui précèdent, on tire

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^{\frac{2\mu}{g}} \cos^2\alpha.(2gy + a^2)^{1-\frac{\mu}{g}},$$

et il n'y a plus qu'à diviser membre à membre pour avoir l'équation différentielle de la courbe demandée

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{a^{\frac{2\mu}{g}} \cos^2\alpha} (2gy + a^2)^{\frac{\mu}{g}} - 1.$$

L'intégration s'effectue facilement dans les cas suivants :

1° $\mu = g$, ce qui suppose $k = 0$. — Parabole comme dans le cas d'un point libre.

2° $\mu = 2g$, ce qui suppose $k = \frac{1}{2}$. — Chaînette dont la concavité est tournée du côté des y positives.

3° $\mu = -g$, ce qui suppose $k = 2$. — Courbe analogue à la cycloïde, convexe du côté des y positives.

On peut discuter généralement l'équation différentielle en distinguant les deux cas de $\mu > 0$ et de $\mu < 0$: dans le premier, on a des courbes infinies comme la parabole et la chaînette ; dans le second, des courbes limitées comme celle qui répond à $\mu = -g$.

Note. — La question I a été proposée dans le tome II des Suppléments aux Actes de Leipsig, par Bernoulli, professeur à Groningue. Une solution par le marquis de l'Hôpital se trouve dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1700.

SOLUTION DE LA QUESTION 79;

PAR M. J. DE VIRIEU,
De l'Institution Poncin, à Lyon.

1. Cette question, proposée à la page 454 du t. II, est par erreur numérotée 67, le n° 67 se trouvant à la page 326.

On trouve dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital, section XI, exemple III, la question suivante :

« Un voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F » doit traverser deux campagnes séparées par la ligne » droite AB; on suppose qu'il parcourt dans la campagne » du côté de C l'espace a dans le temps c, et dans l'autre, » du côté de F, l'espace b dans le même temps c. On de- » mande par quel point E de la droite AB il doit passer » afin qu'il emploie le moins de temps qu'il est possible » pour aller de C en F. »

On propose de déterminer le nombre des solutions et de discuter complétement le problème, le marquis de l'Hôpital s'étant borné à former l'équation.

2. Posons

$$\frac{a}{c} = \alpha, \quad \frac{b}{c} = 6;$$

α et β seront les vitesses respectives du voyageur dans la campagne du côté de C et dans la campagne du côté de F, ou bien les vitesses de départ et d'arrivée. Soient f, g les distances absolues des points F, C à la ligne de séparation; F′, C′ leurs projections sur cette ligne, et δ la distance mutuelle de ces projections.

Les quantités α, β, f, g sont positives, non nulles, δ est positif ou nul.

3. Prenons pour origine des coordonnées rectangulaires la projection C′ du point de départ sur la ligne de séparation, et cette même ligne pour axe des abscisses; supposons de plus que les demi-axes soient choisis de telle sorte qu'aucune des coordonnées du point F ne soit négative.

Si l'on désigne par x l'abscisse d'un point quelconque D de la ligne de séparation, on aura

	Abscisses.	Ordonnées.
C	0	$-g$
F	$+\delta$	$+f$
D	x	0

d'où

$$CD = \sqrt{x^2 + g^2}, \quad DF = \sqrt{(\delta + x)^2 + f^2},$$

et pour l'équation de la droite CF, y', x' représentant les coordonnées courantes,

$$y' + g = \frac{g + f}{\delta} x'$$

ou

$$y' = \frac{g + f}{\delta} \left(x' - \frac{g}{g + f} \delta \right);$$

d'où l'on voit qu'en désignant par G le point où cette

droite coupe la ligne de séparation $\frac{g}{g+f}\delta$ est l'abscisse de ce point.

4. Soit T le temps employé pour parcourir la ligne brisée CDF, on a

$$T = \frac{1}{\alpha}\sqrt{x^2+g^2} + \frac{1}{6}\sqrt{(\delta-x)^2+f^2},$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{\alpha}\frac{x}{\sqrt{x^2+g^2}} - \frac{1}{6}\frac{\delta-x}{\sqrt{(\delta-x)^2+f^2}},$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{g^2}{(x^2+g^2)\sqrt{x^2+g^2}} + \frac{1}{6}\frac{f^2}{[(\delta-x)^2+f^2]\sqrt{(\delta-x)^2+f^2}}.$$

Pour toutes les valeurs réelles, finies ou nulles de x, les trois fonctions T, $\frac{dT}{dx}$, $\frac{d^2T}{dx^2}$ sont continues et la dernière toujours positive.

La fonction T ne comporte pas de maximum fini et ne peut comporter qu'un seul minimum, qui sera un minimum absolu; ce minimum, s'il existe, correspond à une valeur réelle de x pour laquelle $\frac{dT}{dx}$ s'annule; la forme de cette dernière fonction montre que pour cette valeur de la variable les fonctions x et $\delta - x$ doivent être ou toutes deux nulles ou toutes deux de même signe.

Il en résulte que si T peut être un minimum, la valeur correspondante de x est une des racines réelles de

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{\alpha^2}\frac{x^2}{x^2+g^2} = \frac{1}{6^2}\frac{(\delta-x)^2}{(\delta-x)^2+f^2},$$

pour laquelle les fonctions x, $\delta - x$ sont ou toutes deux nulles ou toutes deux de même signe.

5. Examinons le cas particulier où $\delta = 0$. L'équa-

tion (A) devient

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{x^2}{x^2+g^2} = \frac{1}{6^2}\,\frac{x^2}{x^2+f^2},$$

et les fonctions x, $\delta - x$ se réduisent à $+x$, $-x$, fonctions qui ne peuvent être toutes deux de même signe, mais qui sont toutes deux nulles pour $x=0$; or $x=0$ est racine de l'équation (B). Donc T a dans ce cas une valeur minimum correspondant à $x=0$.

Cette valeur minimum est

$$\frac{g}{\alpha} + \frac{f}{6}.$$

Donc lorsque le lieu de départ et le lieu d'arrivée se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de séparation, pour que le trajet soit le plus court possible, il faut, quelles que soient les vitesses de départ et d'arrivée, que le voyageur suive la droite qui joint le point de départ au point d'arrivée.

6. δ n'étant pas nul, les fonctions x, $\delta - x$ ne peuvent être ni toutes deux nulles, ni toutes deux négatives; elles sont toutes deux positives pour toute valeur de x comprise entre o et δ. Il en résulte qu'en posant

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{(\delta - x)^2}\cdot\frac{(\delta - x)^2 + f^2}{x^2 + g^2},$$

T ne sera susceptible de minimum qu'autant que l'équation

$$\text{(C)} \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\alpha^2}{6^2}$$

aura une racine comprise entre o et δ.

7. On a

$$F(x) = \frac{x^2}{(\delta - x)^2} \cdot \frac{(\delta - x)^2 + f^2}{x^2 + g^2},$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 2\,\frac{g^2 x(\delta - x)[(\delta - x)^2 + f^2] + f^2 x^2 (x^2 + g^2)}{(\delta - x)^3 (x^2 + g^2)^2}.$$

$F(x) = 0$, $F(x) = +\infty$, et pour toute valeur de x comprise entre o et δ, $F(x)$ et $\frac{dF(x)}{dx}$ sont continues et positives.

Si donc on fait croître x d'une manière continue de o à δ, $F(x)$ croît d'une manière continue, constamment et indéfiniment à partir de zéro, et passe ainsi par toutes les valeurs positives possibles. Entre o et δ, il existe donc une valeur de x et une seule pour laquelle $F(x) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$. L'équation (C) a une racine et une seule entre o et δ.

8. Si l'on remarque que $F\left(\frac{g}{f+g}\,\delta\right) = 1$, on formera le tableau suivant :

x croissant de o à $\frac{g}{f+g}\,\delta$, $F(x)$ positif, plus petit que 1, croît constamment ;

$x = \frac{g}{f+g}\,\delta$, $F(x) = 1$;

x croissant de $\frac{g}{f+g}\,\delta$ à δ, $F(x)$ positif, plus grand que 1, croît constamment et indéfiniment.

9. Si l'on désigne par ξ l'unique racine de

$$\frac{x^2}{(x - \delta)^2} \cdot \frac{(\delta - x)^2 + f^2}{x^2 + g^2} = \frac{\alpha^2}{6^2},$$

qui soit comprise entre o et δ, on aura

$$\xi \lesseqgtr \frac{g}{f+g}\delta \text{ suivant que } \alpha \lesseqgtr \beta;$$

$\frac{g}{f+g}\delta$ est d'ailleurs l'abscisse du point G où la droite CF coupe la ligne de séparation.

10. *Résumé.* — Lorsque la droite qui joint les points de départ et d'arrivée est perpendiculaire à la ligne de séparation, c'est une droite que doit suivre le voyageur pour que le trajet soit le plus court possible.

Dans tout autre cas, le point E où le voyageur doit franchir la ligne de séparation est toujours situé entre les projections sur cette ligne des points de départ et d'arrivée, savoir :

Entre la projection du point de départ et le point G..........	vitesse de départ $<$ vitesse d'arrivée.
Au point G lui-même..	vitesse de départ $=$ vitesse d'arrivée.
Entre le point G et la projection du point d'arrivée.........	vitesse de départ $>$ vitesse d'arrivée.

Sa distance à la projection du point de départ est l'unique racine de

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{(\delta-x)^2}\cdot\frac{(\delta-x)^2+f^2}{x^2+g^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

qui soit comprise entre o et δ.

11. La ligne de plus court trajet n'est une ligne droite que dans les deux cas suivants :

1° Lorsque les points de départ et d'arrivée sont sur une même perpendiculaire à la ligne de séparation;

2° Quand les vitesses de départ et d'arrivée sont égales.

L'équation E n'ayant qu'une seule racine comprise entre o et δ, cette racine peut, quand les données sont numériques, être obtenue avec toute l'approximation désirable, par la méthode des substitutions successives.

12. Par le point E, déterminé comme il a été dit au n° 10, menons à la ligne de séparation une perpendiculaire indéfinie C_2EF_2, C_2 étant de même côté que C; F_2 de même côté que F par rapport à AB.

Posons

$$C_2EC = \varphi, \quad F_2EF = \omega,$$

on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\xi}{g}, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{\delta - \xi}{f},$$

d'où

$$\xi^2 = g^2 \operatorname{tang}^2\varphi, \qquad \xi^2 + g^2 = \frac{g^2}{\cos^2\varphi},$$

$$(\delta - \xi)^2 = f^2 \operatorname{tang}^2\omega, \quad (\delta - \xi)^2 + f^2 = \frac{f^2}{\cos^2\omega}.$$

L'identité

$$\frac{\xi^2[\delta - x)^2 + f^2}{(\delta - \xi)^2(\xi^2 - g^2)} = \frac{\alpha^2}{6^2}$$

devient

$$\frac{\left(\dfrac{g^2 f^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2\omega}\right)}{\left(\dfrac{f^2 g^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\cos^2\omega}\right)} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\omega} = \frac{\alpha^2}{6^2};$$

les angles aigus ω, φ dépendent de

$$g\operatorname{tang}\varphi + f\operatorname{tang}\omega = \delta, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Si l'on adopte le principe de moindre action, l'équation

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = \frac{\alpha}{6}$$

semble exprimer que l'indice de réfraction pour deux milieux différents est égal au rapport des vitesses avec lesquelles la lumière s'y meut.

SUR TROIS CARRÉS, LORSQU'ILS SONT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;

PAR M. AD. GUIBERT.

Il y a une infinité de systèmes de trois carrés qui peuvent être en progression arithmétique; nous présentons, dans ce qui suit, quelques propriétés concernant ces nombres et les progressions auxquelles ils appartiennent.

I. — *Si trois carrés sont en progression arithmétique, leur différence est un multiple de* $2^3 \times 3$.

En divisant ces carrés par le plus grand commun diviseur de deux quelconques d'entre eux, on obtient trois carrés a^2, b^2, c^2 en progression arithmétique; l'égalité $a^2 + c^2 = 2b^2$ prouve qu'ils sont premiers entre eux, deux à deux, de la forme $8k + 1$, et aussi de la forme $3k' + 1$; leur différence $b^2 - a^2$ est donc divisible par $2^3 \times 3$.

Voici des exemples :

$(127)^2$, $(145)^2$, $(161)^2$, $b^2 - a^2 = 2^3 \times 3^2 \times 17$,
$(161)^2$, $(229)^2$, $(281)^2$, $b^2 - a^2 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 13 \times 17$,
$(271)^2$, $(409)^2$, $(511)^2$, $b^2 - a^2 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$.
$(433)^2$, $(533)^2$, $(617)^2$, $b^2 - a^2 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 23$.

II. — *Les carrés* a^2, b^2, c^2, *premiers entre eux, étant en progression arithmétique, la raison sera divisible par* 5, *si le second carré n'est pas divisible par* 5; *et elle*

sera divisible par 7, si aucun des carrés extrêmes n'est un multiple de 7.

En considérant les résidus quadratiques minima des modules 5 et 7, et l'égalité $a^2 + c^2 = 2b^2$, on voit que si l'un des nombres a, b, c est divisible par 5, ce doit être b; que si l'un d'eux est multiple de 7, ce ne peut être que a ou c.

Supposons b non multiple de 5, l'égalité précédente exige que les résidus quadratiques minima du module 5, relatifs aux carrés a^2, b^2, c^2, soient égaux; la raison est donc un multiple de 5.

De même, si aucun des nombres a, c n'est divisible par 7, l'égalité $a^2 + c^2 = 2b^2$ ne se vérifie que lorsque la raison est un multiple de 7.

Exemples :

$$1,\ (29)^2,\ (41)^2,\ b^2 - a^2 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7,$$
$$(23)^2,\ (37)^2,\ (47)^2,\ b^2 - a^2 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7,$$
$$(17)^2,\ (53)^2,\ (73)^2,\ b^2 - a^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

III. — *Lorsque trois nombres premiers, dont 7 ne fait point partie, ont leurs carrés en progression arithmétique, la raison est toujours un multiple de* $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$.

Cette proposition découle de la précédente, en observant que $(7)^2$ n'étant point, par hypothèse, un des trois termes de la progression, $(5)^2$ n'est pas non plus un de ces termes; car les carrés 1, $(5)^2$, $(7)^2$ forment l'unique progression arithmétique entre les carrés de trois nombres premiers dont l'un est 5, et ces carrés sont exclus, d'après l'énoncé. La raison sera donc divisible par 5×7.

IV. — *Si les trois nombres a, b, c, premiers entre eux, ont leurs carrés en progression arithmétique, chacun des nombres a, c est de l'une des formes* $8k + 1$, $8k + 7$, *b est de l'une des formes* $8k + 1$, $8k + 5$.

Par la résolution de l'équation indéterminée

$$a^2 + c^2 = 2b^2,$$

on trouve les valeurs générales des nombres positifs a, b, c; on parvient aux formules

$$a = p^2 - q^2 - 2pq \quad \text{pour} \quad p^2 > q^2 + 2pq,$$
$$a = q^2 + 2pq - p^2, \quad \text{pour} \quad p^2 < q^2 + 2pq,$$
$$b = p^2 + q^2,$$
$$c = p^2 - q^2 + 2pq;$$

p et q sont deux entiers arbitraires premiers entre eux, l'un pair, l'autre impair; et comme nous supposons $a < b < c$ et que $b^2 - a^2 = 4pq(p^2 - q^2)$, p est plus grand que q; ces deux nombres peuvent toujours être pris positifs.

Or, quand $p^2 - q^2 - 2pq$ est positif,

$$a = p^2 - q^2 - 2pq = (p-q)^2 - 2q^2;$$

lorsque $p^2 - q^2 - 2pq$ est négatif,

$$a = q^2 + 2pq - p^2 = (p - 3q)^2 - 2(p - 2q)^2;$$

d'ailleurs

$$c = p^2 - q^2 + 2pq = (p+q)^2 - 2q^2;$$

a et c, de la forme $x^2 - 2y^2$, sont donc chacun de l'une des formes $8k + 1$, $8k + 7$, puisque y peut être pair ou impair.

Quant à $b = p^2 + q^2$, il est manifestement de l'une des formes $8k + 1$, $8k + 5$.

V. — *Il n'y a que deux progressions arithmétiques dont trois termes consécutifs sont des carrés, si la raison est égale à* $2^3 \times 3 \times 5 \times 7$.

Il suffit de considérer le cas où les trois carrés sont premiers entre eux.

La proposition se justifie par la résolution de l'équation

$$pq(p-q)(p+q) = 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

où les facteurs $p, q, p-q, p+q$ du premier membre sont premiers entre eux deux à deux.

Lorsque q est pair, cette équation est résolue en prenant $q=2$, $p=5$; elle n'admet aucune autre solution : de là, les trois carrés en progression arithmétique

$$1,\ (29)^2,\ (41)^2.$$

q étant impair, l'équation n'est résolue que par $q=1$, $p=6$, ce qui donne les trois carrés

$$(23)^2,\ (37)^2,\ (47)^2.$$

Il est à remarquer que 1, $(29)^2$, $(41)^2$ sont les carrés de trois nombres premiers, ainsi que $(23)^2$, $(37)^2$, $(47)^2$.

VI. — *Si l'on prolonge au delà du troisième carré la progression arithmétique dont les trois premiers termes, premiers entre eux, sont* a^2, b^2, c^2, *le* $n^{\text{ième}}$ *terme sera un carré,* 1° *quand on prendra* $q=1$, $2p=n-2$; 2° *lorsqu'on fera* $q=2$, $p=n-2$.

Le $n^{\text{ième}}$ terme est représenté généralement par

$$(p^2+q^2)^2 + 4(n-2)pq(p^2-q^2);$$

il est identiquement égal à

$$[p^2 + 2(n-2)qp - (2n^2-8n+7)q^2]^2$$
$$+ 4(n-1)(n-2)(n-3)[2p-(n-2)q]q^3;$$

sous cette forme, on voit qu'il se réduit à un carré.

si $2p-(n-2)q=0$, ce qui donne, pour p et q, seulement les valeurs spécifiées dans l'énoncé.

Voici le tableau des progressions dont il s'agit :

$q=1$;

$p=2$, 1, $(5)^2$, $(7)^2, \ldots$, le 6ᵉ terme est $(11)^2$,

$p=4$, $(7)^2$, $(17)^2$; $(23)^2, \ldots$, le 10ᵉ terme est $(47)^2$,

$p=6$, $(23)^2$, $(37)^2$, $(47)^2, \ldots$, le 14ᵉ terme est $(107)^2$,

$p=8$, $(47)^2$, $(65)^2$, $(79)^2, \ldots$, le 18ᵉ terme est $(191)^2$,

. . . .

$q=2$;

$p=3$, $(7)^3$, $(13)^2$, $(17)^2, \ldots$, le 5ᵉ terme est $(23)^2$,

$p=5$, 1, $(29)^2$, $(41)^2, \ldots$, le 7ᵉ terme est $(71)^2$,

$p=7$, $(17)^2$, $(53)^2$, $(73)^2, \ldots$, le 9ᵉ terme est $(143)^2$,

$p=9$, $(41)^2$, $(85)^2$, $(113)^2, \ldots$, le 11ᵉ terme est $(239)^2$,

. . . .

Lorsque $q=1$, le troisième terme de chaque progression est égal au premier terme de la progression suivante; quand $q=2$, il en est de même des progressions dont les rangs sont impairs et de celles où les rangs sont pairs.

Nous allons donner l'explication de ces particularités, en indiquant comment, pour une même valeur de q, arbitraire d'ailleurs, on peut former autant de séries que l'on voudra de progressions arithmétiques de trois carrés premiers entre eux, telles que dans chaque série le troisième terme d'une progression quelconque soit toujours égal au premier terme de la progression suivante :

L'expression de la condition dont il s'agit est

$$[(p+q)^2-2q^2]=[(p'-q)^2-2q^2]^2;$$

on en déduit

$$p'=p+2q.$$

D'après cela, on formera la première série résultant de la plus petite valeur de p, qui est $q+1$, en prenant les valeurs générales des carrés a^2, b^2, c^2, et y faisant successivement

$$p = q+1, \quad 3q+1, \quad 5q+1, \quad \text{etc.}$$

La seconde série dépendra du plus petit nombre s, premier avec q, mais plus grand que $q+1$; les valeurs successives de p seront

$$s, \quad s+2q, \quad s+3q, \quad \text{etc.}$$

Ainsi de suite.

Les termes signalés comme des carrés, au delà des troisièmes termes, dans les progressions relatives à $q=1$ et à $q=2$, donnent encore lieu à une remarque.

Dans toute progression arithmétique, si un terme est un carré u^2, on peut trouver une infinité de termes qui sont des carrés, il suffit de poser

$$u^2 + nr = (u + r\varphi)^2,$$

u^2 étant le premier terme, $n+1$ désigne le rang du terme qui doit être un carré, r la raison de la progression, φ un entier positif arbitraire; il vient, en effet,

$$n = 2u\varphi + r\varphi^2.$$

Mais, et c'est l'observation que nous nous proposions de faire, si l'on voulait employer ce moyen pour obtenir les termes carrés dont on a parlé, placés au delà des troisièmes termes des progressions, φ devrait être fractionnaire et même pourrait être négatif; c'est ce qu'il s'agit de justifier.

En partant du carré $(p^2+q^2)^2$, on prendra pour le $n^{ième}$ terme, dans chaque progression du tableau ci-dessus,

$$(p^2+q^2)^2 + (n-2)r = (p^2+q^2+r\varphi)^2,$$

d'où

$$n-2=2(p^2+q^2)\varphi+r\varphi^2;$$

or, cette équation devient identique : 1° quand $q=1$, $2p=n-2$, φ étant égal, soit à $\frac{1}{2p}$, soit à $\frac{-p}{p^2-1}$; 2° lorsque $q=2$, $p=n-2$ et $\varphi=\frac{1}{4p}$, ou $\varphi=\frac{-p}{2(p^2-4)}$.

ARITHMOLOGIE ÉLÉMENTAIRE — APPLICATION A L'ALGÈBRE ;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,
Correspondant de l'Institut.

Mon excellent et bien regrettable ami M. Terquem affectionnait les mots *arithmologue*, *arithmologie :* c'est ce qui m'a décidé à donner à cet article et à d'autres qui le suivront, le titre qu'il porte et qui aurait été plus clair en ces termes : *Recherches élémentaires sur les nombres entiers*.

1. Un fait arithmétique auquel on est conduit dans plusieurs recherches, c'est que le produit de n nombres entiers consécutifs m, $m-1$, $m-2$,... $m-n+1$, ou dans un autre ordre k, $k+1$, $k+2$,..., $k+n-1$, est divisible par le produit $1.2.3...n=\Pi n$.

Il y a quelque avantage à le prouver comme il suit : on a

$$\frac{k(k+1)...(k+n-1)}{1.2...n}-\frac{(k-1).k...(k-n-2)}{1.\ 2...n}$$
$$=\frac{k.(k+1)...(k+n-1)}{1.2...n-1)},$$

mettant pour k les nombres 2, 3,..., k et sommant, il vient

$$\frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n} - \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots n}$$

$$= \frac{2.3\ldots n}{1.2\ldots n-1} + \frac{3.4\ldots n-1}{1.2\ldots n-1} + \ldots \frac{k.(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1}.$$

Transposant

$$\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots n} = \frac{1.2\ldots n-1}{1.2\ldots n-1} = 1,$$

on a

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1.2\ldots n-1}{1.2\ldots n-1} + \dfrac{2.3\ldots n}{1.2\ldots n-1} + \dfrac{3.4\ldots n+1}{1.2\ldots n-1} + \ldots \\ + \dfrac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1} = \dfrac{k.(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n}. \end{array} \right.$$

La somme des termes du premier membre que l'on peut indiquer par $\sum \frac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1}$ s'obtient en mettant un facteur de plus à chaque terme de l'expression fractionnaire $\frac{k.(k+1)\ldots(k+n-2)}{1.2\ldots n-1}$.

Si dans (a) on pose $n=2$, tous les termes du premier membre sont entiers, par suite le second membre $\frac{k(k+1)}{1.2}$ est entier. De même pour $n=3$, il suit de ce qui vient d'être dit que tous les termes du premier membre sont entiers, donc le second $\frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}$ l'est aussi, et ainsi de suite.

On pourrait, en se donnant immédiatement l'équation (a), la vérifier; en ajoutant à chaque membre

$\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)}{1.2\ldots n-1}$, on verrait le second membre se réduire à $\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{1.2\ldots n}$.

On pourrait encore réduire les deux premiers termes en un seul, puis y joindre le troisième et réduire la somme à un seul terme; et ainsi de suite.

On vérifierait de même ces égalités

$$(b)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{x}{1}+\frac{x(x+1)}{1.2}+\ldots+\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{1.2\ldots n}\\&\qquad=\frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{1.2\ldots n},\end{aligned}\right.$$

et de même, ou par le changement du signe de x,

$$(c)\left\{\begin{aligned}&1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1.2}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x+n-1)}{1.2\ldots n}\\&\qquad=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{1.2\ldots n}.\end{aligned}\right.$$

2. Voici diverses conséquences de la formule (a).

Nombres figurés. — Posez les séries qui suivent :

(1) $\quad 1,\ 2,\ 3,\ldots, m$

(2) $\quad 1,\ 3,\ 6,\ldots,\frac{m(m+1)}{1.2}$

(3) $\quad 1,\ 4,\ 10,\ldots,\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$

(4) $\quad 1,\ 5,\ 15,\ldots,\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}$

. . . .

et vous aurez les nombres dits *figurés*. Les nombres (1) sont les nombres *naturels*. Les nombres (2) sont les nombres *triangulaires*; on les forme ainsi : d'abord 1 premier terme de (1), puis $1+2=3$ somme des deux

par la transposition des seules lettres $a, b \ldots, f$ permutées entre elles, et sans déplacer ou séparer les lettres indiquées par les traits. Donc si l'on a

$$a = b = \ldots = f,$$

les $\Pi \alpha$ arrangements se réduiront à un seul, et il faudra remplacer Πn par $\frac{\Pi n}{\Pi \alpha}$; on voit de même que si β autres lettres devenaient égales entre elles, le nombre de permutations serait $\frac{\Pi n}{\Pi \alpha . \Pi \beta}$, et ainsi de suite. Chacun donnera à cette démonstration les développements qui manquent.

THÉORÈME. — *Le développement* $(a + b + c \ldots + k)^n$, *où les lettres* $a, b, c, \ldots, k$ *sont au nombre de* m, *a* $m \times m \times \ldots m = m^n$ *termes qui sont les arrangements* m *à* m *avec répétition. Si l'on rétablit l'ordre alphabétique de manière à former des combinaisons, la combinaison* $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ où $\alpha + \beta + \gamma \ldots = n$ *est prise un nombre de fois égal à*

$$\frac{\Pi (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)}{\Pi \alpha . \Pi \beta \; \Pi \gamma}.$$

Le terme général du développement est

$$\frac{\Pi (\alpha + \beta + \gamma + \ldots)}{\Pi \alpha . \Pi \beta . \Pi \gamma \ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

sous la relation

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots = n.$$

Le nombre des termes (*qui est celui des combinaisons avec répétition*) *est*

$$\frac{m \; (m + 1) \ldots (m + n - 1)}{1 . 2 \ldots n}.$$

Les différentes parties de cet énoncé sont évidentes par ce qui précède; on peut ajouter que le nombre des arrangements n à n sans répétition est, pour m lettres, $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$, au lieu d'être $m.m\ldots m = m^n$.

4. Il est naturel de passer du cas du polynôme à celui du binôme. Le terme général du développement

$$(a+b)^m$$

est

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta)}{\Pi\alpha.\Pi\beta} a^\alpha b^\beta, \quad \alpha+\beta = m.$$

Comme on a

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta)}{\Pi\alpha.\Pi\beta} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+\beta)}{1.2\ldots\beta}$$
$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-\beta+1)}{1.2\ldots\beta},$$

le coefficient de $a^\alpha b^\beta$ est le nombre des combinaisons β à β de m lettres. C'est aussi celui de m lettres combinées α à α.

Pour bien voir comment les combinaisons s'introduisent dans le développement de $(1+x)^m$, il faut considérer le produit

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)\ldots(1+kx)$$

de m facteurs. Si on fait la multiplication régulièrement, on verra que x^i a pour coefficient la *somme* des combinaisons i à i des m lettres $a, b, \ldots, k$; et quand on posera

$$a = b = c \ldots = 1,$$

chaque combinaison se réduisant à l'unité, le coefficient de x^i dans $(1+x)^m$ sera le nombre de combinaisons de m lettres i à i.

De même dans le développement de

$$(1-x)^{-m} = \frac{1}{(1-x)^m}$$

on verra comme il suit que le coefficient de x^i est le nombre de combinaisons avec répétition de m lettres prises i à i.

On a identiquement

$$\frac{1-a^m x^m}{1-ax} = 1 + ax + a^2 x^2 + \ldots + a^{m-1} x^{m-1}.$$

Supposant $x < 1$ et m de plus en plus grand, on aura

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2 x^2 + \ldots.$$

Si l'on fait le produit de m équations semblables

$$\frac{1}{1-bx} = 1 + bx + b^2 x^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-cx} = 1 + cx + c^2 x^2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-kx} = 1 + kx + k^2 x^2 + \ldots,$$

on verra que dans le produit des seconds membres le coefficient de x^i est la *somme* des combinaisons avec répétition des m lettres $a, b, \ldots, k$ prises i à i.

Puis si l'on fait

$$a = b = c \ldots = k = 1,$$

on verra que dans le produit

$$\frac{1}{(1-x)^m} = (1-x)^{-m}$$

le coefficient de x^i sera le nombre de combinaisons avec répétition de m lettres i à i, parce que chaque combinaison se réduira à l'unité.

Il faut remarquer que si dans $(1-x)^m$ on change le signe de m, on tombe sur la formule précédente

$$(1-x)^{-m}=1+mx+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

N. B. Quand on combine des lettres avec répétition, s'il y a m lettres et que l'on combine i à i pour $i>m$, la répétition sera forcée, mais dans les autres cas, parmi les combinaisons, il y en a où des lettres se répètent, d'autres où elles ne se répètent pas. Dans l'ensemble des combinaisons avec répétition les unes sont avec répétition et les autres sans répétition.

Les nombres de la forme

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}=(m, n)$$

donnent lieu à beaucoup d'autres égalités ; il suffira pour le moment d'avoir vu leur emploi dans la théorie des combinaisons et dans le développement de la puissance

$$(a+b+c+\ldots+k)^n.$$

Dans un autre article il sera prouvé d'une autre manière que le nombre (m, n) est entier, et l'on en déduira d'autres conséquences.

DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE PLUSIEURS QUANTITÉS, de leur formation, et des permutations qui les laissent invariables ;

Par M. MATHIEU,
Professeur.

Supposons une fonction de n quantités a, b, c, ..., l,

$$F(a, b, c, \ldots, k, l);$$

et remplaçons-y les lettres a, b, c, ..., k, l respectivement par les lettres a', b', c', ..., k', l' qui sont supposées être les mêmes lettres dans un ordre différent, la fonction deviendra

$$F\,(a',\ b',\ c',\ \ldots,\ k',\ l'),$$

et l'on dit que l'on a fait sur la fonction donnée la substitution

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & k & l \\ a' & b' & c' & d' & \ldots & k' & l' \end{pmatrix} (*).$$

Considérons, par exemple, la fonction des quatre quantités a, b, c, d,

$$ab^2 + cd^2;$$

faisons sur cette fonction la substitution

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix},$$

cette fonction sera changée en celle-ci :

$$da^2 + bc^2,$$

et la fonction a changé de valeur. Faisons encore sur la fonction $ab^2 + cd^2$ la substitution

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix},$$

(*) Il serait plus naturel de donner aux expressions

$$a\ b\ c\ d \ldots\ l \quad \text{et} \quad a'\ b'\ c'\ d' \ldots\ l'$$

le nom de *dispositions* ou un autre nom analogue, afin de réserver le nom de *permutation* à l'opération qui consiste à permuter les lettres de la fonction; car le mot de *substitution* ne rappelle pas que les lettres primitives et les lettres substituées soient les mêmes à l'ordre près.

nous aurons la fonction

$$cd^2 + ab^2,$$

et l'on voit que par cette seconde substitution la fonction n'a pas changé de valeur.

Disposons les lettres a, b, c, ..., l sur un cercle, et dans l'ordre suivant lequel elles sont énoncées; puis mettons chacune d'elles à la place de celle qui la précède, nous aurons fait sur ces lettres une substitution qui est dite *circulaire;* d'après ce qui vient d'être dit, on représenterait cette substitution par l'expression

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & l \\ b & c & d & e & & a \end{pmatrix},$$

mais on l'écrit plus simplement dans une seule ligne

$$(a\ b\ c\ d\ \ldots\ l).$$

Soit par exemple la fonction

$$ab + cd,$$

faisons la substitution circulaire

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (a\ b\ c\ d),$$

et nous aurons la nouvelle valeur

$$bc + da;$$

faisons ensuite sur $ab + cd$ la substitution circulaire

$$\begin{pmatrix} a & c & b & d \\ c & b & d & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (a\ c\ b\ d),$$

et nous trouvons la valeur

$$cd + ba$$

qui est identique à la valeur considérée.

Toute substitution, si elle n'est pas circulaire, peut être décomposée en un certain nombre de substitutions circulaires.

En effet, soit S une substitution quelconque et a une lettre qui en fait partie; cette substitution remplacera la lettre a par une certaine autre lettre que nous appellerons b; cette substitution remplace la lettre b elle-même par une autre; si cette lettre est a, la substitution S renferme la substitution circulaire (ab). Si au contraire S remplace b par une lettre c différente de a, mais qu'elle substitue à c la lettre a, la substitution S contient la substitution circulaire (abc). Imaginons que l'on poursuive cette manière d'opérer, et il est évident que la lettre a fait partie d'une substitution circulaire contenue dans la substitution S. Soit f une lettre qui n'appartienne pas à cette substitution circulaire et qui soit permutée par S; on trouvera de même la substitution circulaire dont f fait partie. Et ainsi de suite.

Ainsi prenons pour exemple la substitution

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & e & a & b & d \end{pmatrix};$$

elle peut se décomposer en les deux substitutions circulaires

$$(a\ c),\quad (b\ e\ d).$$

Considérons encore la substitution

$$(\alpha)\qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i & k \\ b & d & h & c & g & e & k & a & f & i \end{pmatrix};$$

elle peut se décomposer en les deux substitutions circulaires

$$(a\ b\ d\ c\ h)\quad (e\ g\ k\ i\ f).$$

Les substitutions circulaires en lesquelles se décompose

une substitution quelconque sont appelées les *cycles* de la substitution. Si le nombre des lettres de chacun des cycles d'une substitution est le même, la substitution est dite *régulière;* ainsi la substitution (α) est régulière, parce qu'elle se décompose en deux cycles qui renferment tous deux cinq lettres.

Il est clair que si une fonction est invariable par deux substitutions A et B, elle est invariable par la substitution que l'on obtient en faisant d'abord la substitution A, ensuite B; ainsi, par exemple, la fonction $ab + cd$ est invariable par chacune des deux substitutions

$$(a\ b),\quad (a\ c\ b\ d);$$

si on effectue la première, puis la seconde, on se trouve avoir fait la substitution

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (a\ d)\ (b\ c),$$

qui laisse invariable la fonction $ab + cd$.

Soient

$$\text{A, B, C, } \ldots, \text{ G}$$

différentes substitutions effectuées sur les n lettres d'une fonction

$$\text{F}(a, b, c, \ldots, l),$$

et qui laissent cette fonction invariable; si nous faisons successivement dans un ordre quelconque quelques-unes de ces substitutions, nous obtiendrons en général d'autres substitutions, qui laisseront la fonction F invariable; toutes les substitutions ainsi formées sont appelées les *dérivées* des substitutions A, B, ..., G. On considère

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & l \\ a & b & c & \ldots & l \end{pmatrix}$$

comme faisant partie de ces substitutions dérivées.

Ainsi, par exemple, soient les deux substitutions

$$(\beta) \qquad (ab)\,(cd), \quad (ad)\,(bc),$$

qui laissent invariable la fonction

$$(a-b)\,(c-d).$$

On voit facilement que toutes les dérivées des substitutions (β) sont les quatre substitutions

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \ (ab)(cd), \quad (ad)(bc), \quad (ac)(bd)$$

et ces quatre substitutions laissent invariable la fonction $(a-b)\,(c-d)$.

Si sur la fonction

$$(\gamma) \qquad F(a, b, c, \ldots, l)$$

on fait les M substitutions qui la laissent invariable, on obtient M valeurs égales de cette fonction, savoir F, F_1, $F_2, \ldots, F_{M-1}$.

Faisons ensuite sur la fonction (γ) la substitution

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & l \\ a' & b' & c' & \ldots & l' \end{pmatrix}$$

qui change cette fonction; $a', b', c', \ldots, l'$ sont par conséquent les lettres $a, b, c, \ldots, l$ prises dans un autre ordre; nous aurons la fonction

$$(\delta) \qquad F(a', b', c', \ldots, l');$$

changeons dans les M substitutions qui laissent la fonction (γ) invariable les lettres $a, b, c, \ldots, l$, respectivement en $a', b', c', \ldots, l'$ et nous aurons M substitutions qui laissent la fonction (δ) invariable, et si on les effectue sur la fonction (δ), on obtient M autres valeurs égales

F', F'_1, F'_2, ..., F'_{M-1}. On voit d'après cela que les $1.2.3...n$ valeurs que l'on obtient en permutant les n lettres a, b, c, ..., l dans la fonction (γ) de toutes les manières possibles sont égales M à M, et que le nombre des valeurs distinctes de la fonction (γ) est égal à $\frac{1.2.3...n}{M}$, et, par conséquent, à un diviseur du produit $1.2.3...n$.

Des fonctions transitives.

On appelle fonction *transitive* une fonction dans laquelle on peut faire occuper à une lettre quelconque telle place que l'on veut, sans que la fonction change de valeur, à la condition de faire occuper à toutes les autres des positions convenablement choisies.

Une fonction qui n'est pas transitive est dite *intransitive*.

Prenons pour exemple la fonction de quatre lettres

$$ab + cd^2;$$

on voit immédiatement que cette fonction est intransitive; car il est clair que si l'on met a à la place de c, quelles que soient les places occupées par les trois autres lettres, la fonction changera de valeur.

On voit encore que

$$ab^2 + cd^2$$

est une fonction intransitive, car on ne peut amener a à la place de b sans changer sa valeur.

Montrons maintenant des fonctions transitives. Toute fonction symétrique est évidemment transitive; ainsi, par exemple, la fonction symétrique

$$a + b + c + d$$

est transitive; mais il existe d'autres fonctions transitives que celles qui sont symétriques. Une fonction est en effet transitive toutes les fois qu'elle est invariable par une substitution circulaire effectuée sur toutes ses lettres.

Ainsi, par exemple, soit la fonction

$$ab^2c^3d^4 + bc^2d^3a^4 + cd^2a^3b^4 + da^2b^3c^4, \tag{1}$$

qui est invariable par la substitution circulaire

$$(abcd);$$

faisons cette substitution sur cette fonction une fois, deux fois, trois fois, nous obtiendrons trois valeurs égales à la fonction (1) et qui se présenteront de la manière suivante :

$$bc^2d^3a^4 + cd^2a^3b^4 + da^2b^3c^4 + ab^2c^3d^4,$$
$$cd^2a^3b^4 + da^2b^3c^4 + ab^2c^3d^4 + bc^2d^3a^4,$$
$$da^2b^3c^4 + ab^2c^3d^4 + bc^2d^3a^4 + cd^2a^3b^4.$$

Or, en agissant ainsi, on amène dans la fonction (1) à la place de la lettre a successivement b, c, d; et à la place de b successivement c, d, a, et ainsi de suite. Il est donc évident que la fonction (1) est transitive.

Du reste, une fonction peut être transitive sans être invariable par une substitution circulaire effectuée sur toutes les quantités qu'elle renferme. Par exemple, il est aisé de voir que la fonction

$$(a-b)(c-d)$$

est changée par toute substitution circulaire effectuée sur les quatre quantités a, b, c, d, et cependant elle est transitive.

Mais, lorsque le nombre des quantités renfermées dans une fonction transitive est premier, cette fonction est nécessairement invariable par une substitution circulaire

effectuée sur toutes les quantités. Nous avons démontré ce théorème dans le *Journal de M. Liouville*, année 1861, p. 304.

Il est facile de reconnaître que le nombre des valeurs distinctes d'une fonction transitive de n lettres est le même que si cette fonction était considérée comme fonction de $n - 1$ lettres, c'est-à-dire que si l'on supposait une lettre immobile. Considérons, en effet, une fonction transitive de n lettres

$$F(a, b, c, d, \ldots, k, l),$$

et supposons que l'on ait fait sur ses lettres toutes les permutations possibles. Nous pourrons ensuite, dans toutes les fonctions ainsi obtenues, et dans lesquelles la lettre a ne sera pas à la première place, l'amener à cette place, pourvu que nous déplacions convenablement les autres. Toutes les valeurs se réduisant à des fonctions dans lesquelles a occupe la première place, il est clair que la fonction F acquiert toutes ses valeurs, considérée comme fonction des $n - 1$ lettres $b, c, d, \ldots, l$.

Reprenons la fonction transitive de quatre lettres

$$(a - b)(c - d); \tag{2}$$

cette fonction acquiert toutes ses valeurs distinctes, si on laisse a immobile et si l'on permute les trois quantités b, c, d. D'ailleurs les $1 . 2 . 3 = 6$ permutations que l'on peut faire sur b, c, d donnent toutes des valeurs distinctes; donc la fonction (2) a six valeurs.

Des fonctions plusieurs fois transitives.

Il arrive quelquefois qu'une fonction transitive de n lettres est encore transitive par rapport à $n - 1$ de ces lettres, et l'on dit alors que la fonction est deux fois tran-

sitive. Si cette fonction est encore transitive, considérée comme fonction de $n - 2$ lettres prises parmi les $n - 1$ précédentes, on dit que la fonction est trois fois transitive, et ainsi de suite.

On voit par là qu'une fonction μ fois transitive acquiert toutes ses valeurs considérée comme fonction de $n - \mu$ lettres seulement. Considérons la fonction des cinq lettres a, b, c, d, e :

$$(3) \quad (ad + bc)(ab + ce)(ac + bd)(ac + de)(af + be);$$

on vérifie qu'elle est invariable par la substitution circulaire

$$(abcde);$$

donc cette fonction est transitive et acquiert toutes ses valeurs par les permutations des quatre lettres a, b, c, d. On peut ensuite vérifier que cette fonction est invariable par la substitution circulaire

$$(abdc);$$

donc elle est encore transitive par rapport aux quatre lettres a, b, c, d. Cette fonction est deux fois transitive, et elle acquiert toutes ses valeurs par les permutations des trois lettres a, b, c. On constate ensuite facilement que les permutations des trois lettres a, b, c donnent $1.2.3 = 6$ résultats distincts; donc cette fonction deux fois transitive a six valeurs.

Considérons encore la fonction des six lettres a, b, c, d, e, f :

$$(4) \quad \begin{bmatrix} (ad + bc + ef)(ab + ce + df)(ac + bd + cf) \\ (ac + de + bf)(af + bc + cd), \end{bmatrix},$$

que l'on déduit facilement de la fonction (3); on vérifie que cette fonction est invariable par la substitution circulaire

$$(acbfed);$$

donc cette fonction est transitive par rapport à ses six lettres a, b, c, d, e, f; ensuite elle est invariable comme la fonction (3) par les substitutions

$$(abcde), \quad (abdc);$$

donc elle est aussi transitive par rapport aux cinq lettres a, b, c, d, e, et par rapport aux quatre lettres a, b, c, d. C'est donc une fonction trois fois transitive, et comme la fonction (3) elle a $1.2.3 = 6$ valeurs.

(Cette fonction trois fois transitive de six lettres est la plus simple des fonctions trois fois transitives dont le nombre des lettres est un nombre premier augmenté d'une unité et dont l'existence se trouve démontrée dans le *Journal de M. Liouville*, année 1860, p. 24).

Pour se faire une idée parfaitement exacte des fonctions plusieurs fois transitives, il convient de démontrer le théorème suivant :

« Si une fonction de n lettres est μ fois transitive, elle est transitive par rapport à $n-1$ lettres quelconques; elle est transitive par rapport à $n-2$ lettres quelconques, etc.; enfin elle est transitive par rapport à $n-\mu+1$ lettres quelconques. »

Ainsi, supposons une fonction transitive par rapport à ses n lettres

$$a, b, c, d, \ldots, k, l,$$

puis par rapport aux lettres

$$b, c, d, \ldots, k, l,$$

puis par rapport aux lettres

$$c, d, \ldots, k, l,$$

et ainsi de suite. Je dis que la fonction est transitive par

rapport à $n - \mu + 1$ lettres quelconques

(5) $$e_1, f_1, \ldots, k_1, l_1.$$

Désignons par a', b'', c''',... les $\mu - 1$ lettres de la fonction qui ne font pas partie des lettres (5). Puisque la fonction est transitive par rapport aux lettres a, b, c,..., k, l, nous pouvons amener la lettre a' à la place de la lettre a, et les $n-1$ autres b', c',..., k', l' remplaceront respectivement b, c,..., k, l. Or ces $n-1$ lettres b', c',..., k', l' remplaçant respectivement b, c,..., k, l, la fonction sera transitive par rapport aux lettres

$$b', c', d', \ldots, k', l',$$

puis par rapport aux lettres

$$c', d', \ldots, k', l',$$

et ainsi de suite. Parmi les $n-1$ lettres b', c',..., k', l', nous pouvons prendre b'' et l'amener à la place de b', pourvu que nous déplacions convenablement les autres, et les lettres c', d'..., k', l' seront remplacées respectivement par c'', d'',..., k'', l''. Les lettres c'', d'',..., k'', l'' se trouvent dans les mêmes conditions que les lettres c', d'..., k', l' et par suite que les lettres c, d,..., k, l. On peut imaginer que l'on continue ce raisonnement et la proposition à démontrer devient évidente.

On reconnaît aussi, d'après le raisonnement même qui vient d'être fait, qu'on peut, dans une fonction μ fois transitive, amener μ lettres quelconques à telles places que l'on veut.

Dans une fonction transitive de n lettres, chacune des lettres remplit le même rôle. Ce qui précède prouve que dans une fonction μ fois transitive de n lettres, l'ensemble de μ lettres remplit toujours le même rôle dans la fonc-

tion, quelles que soient les μ lettres que l'on considère, et quel que soit l'ordre dans lequel on les prend.

Ainsi dans la fonction trois fois transitive

$$(ad + bc + ef)(ab + ce + df)(ae + bd + cf)$$
$$(ac + de + bf)(af + be + cd)$$

que nous avons considérée tout à l'heure, l'ensemble de trois des six lettres remplit le même rôle, quelles que soient les trois lettres considérées, et l'on peut amener trois quelconques des six lettres à trois quelconques des six places, pourvu que l'on assigne aux trois autres lettres des places convenables.

On ne connaît pas de fonctions qui soient transitives plus de cinq fois. L'existence d'une fonction cinq fois transitive de douze lettres se trouve démontrée dans le *Journal de M. Liouville* (année 1861, p. 270).

Considérons encore la fonction de sept lettres

$$(6)\quad \begin{cases} (ab+cd+ef)(ac+bd+eg) \\ \times(ad+bc+gf)(ae+bf+cg) \\ \times(af+be+dg)(ag+ce+df)(bg+cf+de). \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette fonction est invariable par les deux substitutions

$$(ace)(bdf),\qquad (ab)(cd),$$

et par suite que cette fonction est transitive par rapport aux six lettres a, b, c, d, e, f. On reconnaît de même qu'elle est invariable par la substitution

$$(ae)(cg);$$

or cette fonction étant transitive par rapport aux six lettres a, b, c, d, e, f, et étant invariable par cette dernière substitution, est évidemment transitive par rapport aux

sept lettres a, b, c, d, e, f, g; donc elle est deux fois transitive, et elle acquiert toutes ses valeurs par les permutations de cinq quelconques de ses lettres, par exemple de a, b, c, d, e. La fonction est transitive aussi par rapport aux quatre lettres a, b, c, d; car on constate qu'elle est invariable par les deux substitutions

$$(7) \qquad (ab)(cd), \qquad (ad)(bc);$$

mais considérée comme fonction des cinq lettres a, b, c, d, e, elle est changée par toute substitution qui remuerait la lettre e; car autrement la fonction étant transitive par rapport aux quatre lettres a, b, c, d, il est clair que la lettre e pourrait être permutée avec chacune des lettres a, b, c, d, et par conséquent que la fonction serait transitive aussi par rapport aux cinq lettres a, b, c, d, e; donc, considérée comme fonction de sept lettres, la fonction serait quatre fois transitive, et acquérant toutes ses valeurs par les permutations des trois lettres a, b, c, n'aurait pas plus de six valeurs; or la fonction a plus de six valeurs. En effet, transposons la lettre a avec chacune des six autres, nous aurons, en comptant la fonction (6), sept fonctions résultantes; et si la fonction n'avait que six valeurs, en transposant a en b' et ensuite a en c', on aurait deux valeurs égales F_1 et F_2. Représentons la fonction (6) par

$$F = F(a, b', c', \ldots),$$

on aurait

$$F_1 = F(b', a, c', \ldots),$$
$$F_2 = F(c', b', a, \ldots),$$

qui seraient deux valeurs égales; donc F_1 serait invariable par la substitution circulaire $(a, b' c')$, et par suite F invariable par $(b' a c')$, et comme à la place de b', a, c' on peut amener les trois lettres a, b, c, puisque la fonc-

tion est supposée quatre fois transitive, la fonction F ou (6) serait invariable par la substitution circulaire $(a\,b\,c)$, ce qui n'a pas lieu.

On constate que par les permutations des trois lettres a, b, c la fonction (6) acquiert six valeurs distinctes; donc les seules substitutions effectuées sur a, b, c, d, e, laissent invariable la fonction (6), sont les dérivées des substitutions (7), c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \ (ab)\,(cd), \ \ (ad)\,(bc), \ \ (ac)\,(bd).$$

Considérée comme fonction de ces cinq lettres, elle a donc quatre valeurs égales et par conséquent $\dfrac{1.2.3.4.5}{4} = 30$ valeurs distinctes; c'est donc aussi le nombre de ses valeurs distinctes, quand on permute les sept lettres.

Prenons ensuite la fonction de huit lettres

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &(ab+cd+ef+gh)\,(ac+bd+eg+fh) \\ &\times(ad+bc+eh+gf)\,(ae+bf+cg+dh) \\ &\times(af+be+ch+dg)\,(ag+bh+ce+df) \\ &\times(ah+bg+cf+de), \end{aligned} \right.$$

qui se déduit facilement de la fonction (6). Si dans la fonction (8) on suppose h immobile, cette fonction est *semblable* à la fonction (6), c'est-à-dire invariable par les mêmes substitutions. On reconnaît ensuite que cette fonction est invariable par la substitution

$$(ef)\,(gh);$$

d'ailleurs elle est transitive par rapport aux sept quantités a, b, c, d, e, f, g, donc cette fonction est transitive par rapport aux huit lettres a, b, c, d, e, f, g, h. Ainsi la fonction (8) est trois fois transitive, et comme la fonction (6) elle a 30 valeurs distinctes.

Cette fonction trois fois transitive de huit lettres appartient à une famille de fonctions dont le nombre des quantités est une puissance d'un nombre premier, et qui a été étudiée dans le *Journal de M. Liouville* (année 1861, p. 275).

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De M. VINCENT,
Membre de l'Institut.

A la page 157 du tome XXI, au sujet de la question 577, on signale une différence entre deux énoncés, qui tient sans aucun doute à ce que l'on a fait deux *conventions contradictoires*, savoir : 1° que *l'unité d'angle polyèdre est le trièdre trirectangle*, et 2° que *l'unité d'angle dièdre est l'angle dièdre droit.*

Or je dis que ces conventions sont *contradictoires :* car Français dit très-bien (*Annales de Gerg.*, t. III, p. 90, note) que *l'angle dièdre doit, comme les angles polyèdres, être mesuré par la portion de surface sphérique qu'il intercepte.* D'où résulte nécessairement de deux choses l'une, ou que l'on prendra pour unité l'angle trièdre trirectangle, et alors l'angle dièdre droit sera égal à 2, ou que l'on prendra pour unité l'angle dièdre droit, et alors l'angle trièdre trirectangle vaudra $\frac{1}{2}$ (*).

J'ai cru devoir vous adresser cette observation parce qu'elle intéresse la logique de l'enseignement, et il y a

(*) Ce second mode est peut-être le meilleur, puisqu'il revient à prendre l'aire du grand cercle pour unité de surface sphérique. C'est celui que j'avais adopté dans ma *Géométrie* (pardon de la citation).

peut-être lieu de s'étonner qu'elle soit nécessaire encore aujourd'hui.

Je ferai encore remarquer une autre inexactitude : c'est que l'article des *Annales de Gergonne* est rédigé par *Français* professeur aux écoles d'artillerie, et non par son frère à qui le théorème est attribué.

NOTE SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON

(voir page 188);

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

Cette erreur relative est

$$\frac{\omega}{h} = -\frac{f''(\alpha + \theta h)}{2f'\alpha} h,$$

de sorte que

$$\frac{\omega}{h} < \frac{A}{2b} h < \frac{1}{10^p} h.$$

On aura de même

$$\frac{\omega'}{h'} = -\varphi'' \frac{(\alpha' + \theta' h')}{2\varphi'\alpha'} h' < \frac{At^2}{2bt} h' < \frac{A}{2b} h < \frac{1}{10^p} h.$$

L'erreur relative sur h' s'apprécie donc par la même limite que celle qui concerne h.

L'approximation possible d'un côté sera par suite du même ordre que de l'autre, d'après ce qui est connu sur les erreurs relatives.

Quand $f\beta$ et $f''\beta$ se trouvent de même signe, le calcul se fait en partant de β. Les mêmes considérations sont applicables à ce cas ; les conclusions seront les mêmes.

Je termine par une remarque utile au cas où le premier chiffre significatif de h est d'ordre inférieur à $\frac{1}{10^{n+1}}$: c'est que l'erreur relative sur h, quand on prend $-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ pour sa valeur approchée, étant moindre que $\frac{1}{10^{n+p}}$, il en résulte qu'on peut gagner par ce terme $-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$, $n+p$ chiffres, non pas à partir de l'ordre de $\frac{1}{10^n}$, mais bien à partir d'un premier chiffre significatif dans ce quotient, sans que l'erreur, après avoir forcé le dernier chiffre d'une unité monte à une unité de l'ordre de ce dernier chiffre, supposé qu'on ait $\omega > 0$, au moins tant que les $n+p$ premiers chiffres significatifs de $\frac{f\alpha}{f'\alpha}$ ne sont pas tous des 9.

Cette remarque est également applicable au calcul quand il doit se faire à partir de β.

DÉMONSTRATION DE LA QUESTION 104

(voir t. VIII, p. 236 et 443);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur à Paris.

$f(x) = 0$ est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales. Démontrer qu'en égalant à zéro la dérivee seconde de

$$[f(x)]^{-1}$$

on obtient une équation dont toutes les racines sont imaginaires. (CATALAN.)

Démonstration. — Pour abréger, nous désignerons

$$f(x) \quad \text{et} \quad [f(x)]^{-1}$$

respectivement par y et Y. Dès lors on a

$$(1) \qquad Yy = 1.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ toutes les racines de l'équation donnée. On a identiquement

$$(2) \qquad f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n);$$

prenons la dérivée première de chacune des équations (1) et (2), il vient :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{Y'}{Y} &= -\frac{y'}{y}, \\ \frac{y'}{y} &= \sum \frac{1}{x - a_1}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\frac{Y'}{Y} = -\sum \frac{1}{x - a_1}.$$

Prenons les dérivés des deux membres de cette dernière égalité, on trouve

$$(4) \qquad \frac{YY'' - Y'^2}{Y^2} = \sum \frac{1}{(x - a_1)^2}.$$

Quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, la quantité Y est réelle ; par suite, Y^2 est toujours positive. De plus, l'équation donnée n'ayant que des racines *réelles*, par hypothèse, il s'ensuit que le second membre de l'équation (4) est positif ; donc on a

$$(5) \qquad YY'' - Y'^2 > 0,$$

ou bien, en éliminant Y et Y' au moyen des équations (1)

et (3), on peut écrire

$$y^3 Y'' > y'^2;$$

mais l'équation donnée ayant toutes ses racines *réelles et inégales*, par hypothèse, il s'ensuit que l'équation

$$y' = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles et inégales, d'après le théorème de Rolle; donc y^2 est toujours positif; par suite, on a

$$y Y'' > 0.$$

Or, y ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de x; donc Y'' ne peut devenir nulle pour aucune valeur finie de x, ce qui veut dire en d'autres termes que l'équation

$$Y'' = 0$$

a toutes ses racines imaginaires. C. Q. F. D.

Observation. — Nous laissons au lecteur le soin de trouver l'interprétation géométrique des relations (3) et (5), et de démontrer *à priori* que le polynôme représenté par Y'' est toujours de degré pair, quelle que soit la valeur de n.

Historique. — L'égalité (2) est due à l'algébriste anglais Thomas Harriot. On la trouve dans l'ouvrage posthume de cet auteur ayant pour titre : *Artis analyticæ praxis, ad æquationes algebraicas novâ, expeditâ et generali methodo resolvendas*. Londres, 1631; in-folio.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De M. VIEILLE,
Inspecteur général de l'Université.

Le numéro de mai des *Nouvelles Annales* renferme un article de M. Dieu (p. 193), dans lequel est traité un problème de mécanique concernant le mouvement d'un point matériel pesant, suspendu à un fil qui s'enroule sur une courbe fixe telle, que la tension du fil demeure constante.

Permettez-moi de vous faire observer que la solution de l'auteur coïncide avec celle que j'ai publiée il y a onze ans (*). Sauf quelques opérations de calcul complémentaires et quelques changements d'ordre, ce sont les mêmes formules exprimant l'ordonnée verticale y et la vitesse v en fonction de l'arc s de la courbe fixe, et les mêmes conséquences tirées de la variation de $\frac{dy}{ds}$ et de v. Ce n'est point une réclamation que je vous adresse, mais un simple fait que je constate. Je désire seulement ajouter quelques observations sur la marche suivie par l'auteur dans deux passages :

1° Pour répondre à cette question : *Le mouvement peut-il être oscillatoire?* il n'est pas nécessaire d'avoir complétement intégré les équations du problème; il me paraît plus simple de montrer (**) que la vitesse v ne saurait passer par zéro à aucune époque du mouvement. — De plus, on voit ainsi clairement que l'hypothèse d'une

(*) *Cours complémentaire d'Analyse et de Mécanique rationnelle*, p. 241 et suivantes. Bachelier, 1851.

(**) *Voyez* p. 243 de l'ouvrage cité.

vitesse nulle, à un certain instant, est incompatible avec l'invariabilité de la tension.

2° Pour arriver à construire par points *la courbe fixe*, l'auteur a recours à un angle auxiliaire φ, qui se prête bien au calcul, mais qui a l'inconvénient de n'avoir pas de *signification géométrique*. Il serait préférable de faire dépendre les coordonnées x et y d'une variable auxiliaire ayant une relation immédiate avec la courbe, par exemple l'angle que fait la tangente avec la verticale. De plus, il serait intéressant d'avoir l'équation de la *trajectoire* en fonction du même angle, qui d'ailleurs est inférieur de 90° à celui que fait avec la verticale la tangente à la trajectoire; en effet, cette dernière courbe est la développante de l'autre. Or c'est à quoi je parviens (*) par une marche inverse de celle de l'auteur, c'est-à-dire en cherchant d'abord à exprimer les coordonnées y' et x' de la trajectoire en fonction d'un angle ω, qui est précisément celui que la tangente fait avec la verticale. L'intégration relative à y' est très-simple, et l'on passerait ensuite sans difficulté à l'expression de x' par la relation

$$dx' = \text{tang}\,\omega.\, dy'.$$

Le lecteur est prié d'achever le calcul.

La trajectoire étant connue, il reste à opérer sans intégration nouvelle, par la voie d'élimination ordinaire, le passage de la développante à la développée, etc.

P.-S. — J'ai peut-être tort d'entrer dans ces détails. Je ne suis pas éloigné de penser en effet que ce genre de questions, exigeant l'intégration d'équations différentielles, n'est pas parfaitement à sa place dans un recueil destiné, comme son titre l'indique, aux candidats aux Ecoles Polytechnique et Normale.

(*) *Voyez* p. 244 et 245 de l'ouvrage cité.

SUR QUATRE NOMBRES EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE DONT LES EXTRÊMES ET UN MOYEN SONT DES CARRÉS;

PAR M. AD. GUIBERT.

Lorsque parmi quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique se trouvent trois carrés, ou deux de ces carrés forment les moyens, ou ils forment les extrêmes. Nous avons déjà considéré le premier cas (*); il s'agit ici du second.

I. — *On obtiendra toute progression arithmétique de quatre termes entiers, telle que* A^2, B^2, C, D^2, *en multipliant par un facteur carré les termes d'une progression de même sorte* a^2, b^2, c, d^2, *lesquels sont impairs, premiers entre eux deux à deux.*

Chaque diviseur commun à A^2 et à B^2 divise C et D^2; donc le plus grand commun diviseur de A^2 et de B^2, qui d'ailleurs est un carré, est le plus grand commun diviseur des quatre termes de la progression; les quotients de leur division par ce nombre constituent évidemment une progression arithmétique a^2, b^2, c, d^2, dans laquelle a^2 et b^2 sont premiers entre eux.

Prouvons que les nombres a^2, b^2, c, d^2 sont tous impairs, premiers entre eux deux à deux.

On a

$$a^2 + c = 2b^2, \quad b^2 + d^2 = 2c;$$

a et c sont donc de même parité, ainsi que b et d.

Or c est impair, car, s'il était pair, b serait impair, et, d'après la seconde égalité, la somme des carrés de deux impairs égalerait un multiple de 4, ce qui est impossible.

(*) *Nouvelles Annales*, juin 1862, p. 213.

a et c sont donc impairs.

La même égalité $b^2 + d^2 = 2c$ prouve que b et d sont impairs.

Les relations précédentes montrent de plus que c est premier avec a et avec b, que d est premier avec b et avec c.

Enfin, r désignant la raison de la progression, comme on a

$$d^2 = a^2 - 3r,$$

il est aisé de conclure, si l'on observe que a et r sont premiers entre eux, que a et d le sont aussi.

II. — *On peut former autant de progressions arithmétiques particulières qu'on voudra, telles que* a^2, b^2, c, d^2.

Toutes ces progressions sont données par la résolution de l'équation indéterminée

$$d^2 = 3b^2 - 2a^2;$$

des méthodes connues conduisent aux formules générales

$$a = 2p^2 - 2pq - q^2, \quad b = 2p^2 + q^2, \quad d = 2p^2 + 4pq - q^2,$$
$$b^2 - a^2 = 4pq(p+q)(2p-q),$$

a, b, d indiquant des nombres absolus, il faut prendre positivement les seconds membres des équations qui donnent a et d; p et q sont deux entiers arbitraires premiers entre eux, l'un positif, l'autre positif ou négatif; q est impair.

Mais, pour que a et b n'aient aucun diviseur commun, il ne suffit pas toujours que p et q soient premiers entre eux, à moins que l'un de ces nombres n'admette le diviseur 3; il faut, en outre, quand aucun d'eux n'est mul-

tiple de 3, que les restes de leur division par ce diviseur soient égaux.

En effet, à l'aide du procédé relatif au plus grand commun diviseur algébrique, appliqué aux quantités

$$2p^2 - 3pq - q^2, \quad 2p^2 + q^2,$$

on s'assure que, si elles ont un diviseur commun, ce doit être 3; or, lorsque ni p, ni q n'est multiple de 3, si les restes de leur division par 3 sont égaux, a n'admet point le diviseur 3; si ces restes sont différents, a et b sont divisibles par 3.

Les formules qui précèdent donnent lieu à trois remarques immédiates :

1° La raison $b^2 - a^2$, toujours multiple de 8, est un multiple de 3 si b n'est pas divisible par 3.

2° b est de l'une des formes $8k + 1$, $8k + 3$.

3° A une progression individuelle a^2, b^2, c, d^2, il en correspond constamment une semblable ayant le même second terme. Chaque solution de l'équation $2p^2 + q^2 = V$, où V désigne un entier connu, conduira à deux progressions de l'espèce considérée, dont les seconds termes seront égaux.

Exemple :

$$\begin{array}{llllll} p = 6, & q = 43, & (2293)^2, & (1921)^2, & 2122633, & (745)^2, \\ p = 6, & q = -43, & (1261)^2, & (1921)^2, & 5784361, & (2809)^2, \\ p = 30, & q = 11, & (1019)^2, & (1921)^2, & 6342121, & (2999)^2, \\ p = 30, & q = -11, & (2339)^2, & (1921)^2, & 1909561, & (359)^2. \end{array}$$

Dans chaque suite, les termes sont premiers entre eux.

III. — *Si la progression a^2, b^2, c, d^2 est obtenue en faisant $q = 1$, en la supposant prolongée, le terme dont le rang est $4p + 3$, sera un carré.*

L'expression générale du $n^{ième}$ terme de la progression

a^2, b^2, c, d^2, est

$$(2p^2+q^2)^2+4(n-2)pq(p+q)(2p-q);$$

par l'extraction de la racine carrée algébrique, on peut lui donner la forme

$$[2p^2+2(n-2)pq-(n^2-5n+5)q^2]^2$$
$$+(n-1)(n-2)(n-4)[4p-(n-3)q]q^3;$$

ce $n^{\text{ième}}$ terme est donc un carré; lorsque

$$q=1,\quad 4p+3=n.$$

Observons, en terminant, qu'on ne trouverait pas les termes carrés en question, si, prenant φ entier, on posait

$$(4p^2+1)^2+(n-2)r=(2p^2+1+r\varphi)^2,$$

d'où

$$n-2=2(2p^2+1)\varphi+r\varphi^2,$$

ce qui donnerait d'ailleurs, par des valeurs entières de l'arbitraire φ, une infinité de termes carrés, dans la progression dont le second terme est $2p^2+1$. Pour avoir les premiers carrés, il faudra faire

$$\text{soit}\quad \varphi=\frac{1}{2p},\quad \text{soit}\quad \varphi=\frac{-(4p+1)}{2(p+1)(2p-1)};$$

et, en effet, par chacune de ces valeurs, l'équation

$$n-2=2(2p^2+1)\varphi+r\varphi^2,\quad \text{où}\quad n=4p+3,$$

devient identique.

METHODE D'INTERPOLATION DE GAUSS POUR DES DEMI-INTERVALLES D'ARGUMENT.

ARGUMENT.	FONCTION.	1re DIFFÉR.	2e DIFFÉR.	3e DIFFÉR.	4e DIFFÉR.	5e DIFFÉR.	6e DIFFÉR.	ETC.
.	.							
		.	.					
.	.		.					
		.		.				
.	.		.		.			
		.		.		.		
p	a		.		.			
		.		.		.		Etc.
$p+d$	a'		b		.			
		.		.		.		
.	.		b'		c			
		.		.		.		
.	.		.		c'		d	
		.		.		.		
.	.		.		.		d'	

Connaissant la valeur pa d'une fonction de x, avec les différences d'ordre pair, et les valeurs a' de la même fonction pour $p+d$, on trouve pour la valeur de $p+\frac{1}{2}d$,

$$\frac{1}{2}\left[(a+a')-\frac{1}{8}(b+b')+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{16}(c+c') -\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{24}(d+d'),\ldots\right].$$

La loi de succession est évidente.

Ce tableau synoptique peut servir à trouver par approximation les racines d'une équation, méthode admise dans nos Lycées.

Extrait d'une collection de Tables auxiliaires, éditées en 1822 par Schumacher, nouvelle édition, 1845, par G.-H.-L. Warentorff, professeur au Progymnase de Harburg (Hanovre). Le contenu des Tables est indiqué *in extenso*, en allemand, et par extrait en français. Ouvrage indispensable aux géomètres calculateurs et sujet d'exercices pour tous les professeurs.

ARITHMOLOGIE ÉLÉMENTAIRE — APPLICATION A L'ALGÈBRE

(DEUXIÈME ARTICLE);

PAR M. V.-A. LEBESGUE,
Correspondant de l'Institut.

5. On peut prouver d'une autre manière que

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

est un nombre entier.

On mettra ce nombre sous la forme

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots m-n}\cdot\frac{(m-n+1\ldots(m-1).m}{1.2\ldots m}$$

et l'on fera voir que tout nombre premier p entre au numérateur plus de fois comme facteur qu'au dénominateur, et comme tous les facteurs premiers du dénominateur entrent aussi au numérateur, il en résultera que le nombre précédent est entier.

On prouve tout à fait de même qu'en posant

$$m = a + b + c \ldots + k$$

l'expression fractionnaire

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b+c+k)}{1.2\ldots a\times 1.2\ldots b\times 1.2\ldots c\times\ldots\times 1.2\ldots k}$$

est un nombre entier.

Cela résulte immédiatement des théorèmes suivants.

THÉORÈME. — *Si l'on pose, en décomposant en facteurs premiers,*

$$\Pi n = 1.2.3\ldots n = 2^{\alpha}\, 3^{\beta}\, 5^{\gamma}\ldots p^{\varpi}\ldots,$$

l'exposant ϖ du nombre premier p sera donné par l'équation

$$\omega = e\left(\frac{n}{p}\right) + e\left(\frac{n}{p^2}\right) = e\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots + e\left(\frac{n}{p^i}\right),$$

$e\left(\frac{n}{p^k}\right)$ représentant l'entier de $\frac{n}{p^k}$ et la valeur de ϖ se terminant quand p^i surpasse n (car alors $e\left(\frac{n}{p^i}\right) = 0$).

Démonstration. — Pour avoir l'exposant de p dans Πn, il suffit de considérer dans ce produit les seuls termes $p, 2p, 3p, \ldots, e\left(\frac{n}{p}\right).p$, dont le produit est

$$p^{e\left(\frac{n}{p}\right)}.1.2.3\ldots e\left(\frac{n}{p}\right).$$

Dans le produit $1.2.3\ldots e\left(\frac{n}{p}\right)$, on ne considérera encore que les termes $p, 2p, 3p, \ldots, e\left(\frac{n}{p^2}\right).p$, dont le produit est

$$p^{e\left(\frac{n}{p^2}\right)}\,1.2\,3\ldots e\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

et ainsi de suite, de sorte qu'on trouvera

$$\varpi = e\left(\frac{n}{p}\right) + e\left(\frac{n}{p^2}\right) + e\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots + e\left(\frac{n}{p^i}\right)$$

pour l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise Πn.

Remarque. — Si l'on fait

$$n = a + bp + cp^2 + \ldots,$$

on a

$$\varpi = \frac{n - (a + b + c\ldots)}{p - 1}.$$

La fraction $\frac{n}{p-1}$ est une limite supérieure qui sert dans certains cas.

THÉORÈME. — *Si l'on suppose*

$$n = a + b + c\ldots, \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{p^i} = \frac{a}{p^i} + \frac{b}{p^i} + \frac{c}{p^i},$$

il en résulte

$$e\left(\frac{n}{p^i}\right) \overset{=}{>} e\left(\frac{a}{p^i}\right) + e\left(\frac{b}{p^i}\right) + e\left(\frac{c}{p^i}\right) + \ldots.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de l'équation

$$\frac{n}{p^i} = \frac{a}{p^i} + \frac{b}{p^i} + \frac{c}{p^i} + \ldots,$$

mise sous la forme

$$e\left(\frac{n}{p^i}\right) + f = e\left(\frac{a}{p^i}\right) + f' + e\left(\frac{b}{p^i}\right) + f'' + e\left(\frac{c}{p^i}\right) + f'''\ldots,$$

où f, f', f'', f''' sont des fractions proprement dites. On a le signe $=$, ou le signe $>$, selon que la somme $f' + f'' + f''' + \ldots$ est inférieure ou non à l'unité.

THÉORÈME. — *L'expression fractionnaire*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b+c\ldots)}{1.2.3\ldots a\times 1.2\ldots b\times 1.2.3\ldots c\times\ldots}$$

est un nombre entier.

Démonstration. — L'exposant du nombre premier est au numérateur $e\left(\frac{n}{p}\right)+e\left(\frac{e}{p^2}\right)+\ldots+e\left(\frac{n}{p^i}\right)$, en supposant $n=a+b+c\ldots$; l'exposant de p au dénominateur est

$$e\left(\frac{a}{p}\right)+e\left(\frac{a}{p^2}\right)+\ldots+e\left(\frac{b}{p}\right)+e\left(\frac{e}{p^2}\right)+\ldots$$
$$+e\left(\frac{c}{p}\right)+e\left(\frac{c}{p^2}\right)+\ldots.$$

Or, d'après le théorème précédent, l'exposant du numérateur surpasse celui du dénominateur.

6. Le produit

$$\Pi n=1.2.3\ldots n$$

est ce que l'on nomme *factorielle* du nombre n. Le produit

$$P(p)=2.3.5.7.11\ldots p$$

des nombres premiers successifs de 2 à p, nombre premier, est la factorielle du nombre premier p.

Par $P(n)$, on entendra le produit des nombres premiers *non supérieurs* à n, et par $P\left(\frac{n}{a}\right)$, $P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{a}}\right)$, ..., le produit des nombres premiers non supérieurs à l'entier de $\frac{n}{a}$, de $\sqrt[k]{\frac{n}{a}}$,....

Ceci posé, on a la proposition suivante, due à MM. Tchebichew et de Polignac.

THÉORÈME. — *La factorielle Πn peut se décomposer comme il suit :*

$$\Pi n = \mathrm{P}(n).\mathrm{P}\left(\frac{n}{2}\right).\mathrm{P}\left(\frac{n}{3}\right)\ldots\mathrm{P}\left(\frac{n}{i}\right)\ldots$$
$$\times\mathrm{P}(\sqrt{n}).\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right)\ldots\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)\ldots$$
$$\times\mathrm{P}(\sqrt[3]{n}).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{n}{3}}\right)\ldots\mathrm{P}\left(\sqrt[3]{\frac{n}{i}}\right)\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times\mathrm{P}(\sqrt[k]{n}).\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right)\ldots\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right)\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

la quantité entre parenthèses restant égale ou supérieure à 2.

Démonstration. — Si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{P}(\sqrt[k]{n}).\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right).\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right)\ldots = \mathrm{Q}_k(n),$$

on a

$$(a)\qquad \Pi n = \mathrm{Q}_1.\mathrm{Q}_2.\mathrm{Q}_3\ldots\mathrm{Q}_k\ldots.$$

Il est facile de voir que l'exposant maximum du nombre p, qui n'entre qu'une seule fois dans chaque factorielle $\mathrm{P}(\sqrt[k]{n}),\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right),\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right),\ldots$ est l'entier $e\left(\frac{n}{p^k}\right)$. En effet, la dernière factorielle $\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{i}}\right)$, qui contient p, doit être telle, qu'on ait

$$\sqrt[k]{\frac{n}{i+1}} < p \leqq \sqrt[k]{\frac{n}{i}},$$

d'où l'on tire

$$n < (i+1).p^k,\quad ip^k \leqq n,\quad i+1 > \frac{n}{p^k} \geqq i,$$

et par conséquent

$$i = e\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

L'exposant de p dans le produit

$$Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$$

sera donc

$$e\left(\frac{n}{p}\right) + e\left(\frac{n}{p^2}\right) + e\left(\frac{n}{p^3}\right) \ldots,$$

et comme il en est de même de tout autre facteur premier, il en résulte que le produit $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ est égal à Πn.

7. Il y a une expression plus commode pour représenter Πn. On fera

$$P_i(n) = P\left(\frac{n}{i}\right) . P\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right) . P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{i}}\right) \ldots$$

et il en résultera

$$(b) \qquad \Pi n = P_1(n) . P_2(n) . P_3(n) \ldots .$$

Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on a précisément la formule de M. Tchebichew. C'est seulement dans les applications que les logarithmes deviennent utiles. Voici des conséquences de cette formule, dont M. Tchebichew s'est servi pour montrer qu'il y a, en supposant $a > 3$, au moins un nombre premier entre a et $2a - 2$: proposition admise comme *postulatum* par M. Bertrand dans son Mémoire *Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on permute les lettres qu'elle renferme*.

Quand on a vérifié par les Tables de diviseurs de Burckhardt que le théorème est vrai pour a non supérieur

à une certaine limite, on l'établit généralement, comme le fait M. Tchebichew, au moyen de la valeur approchée de

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log x.$$

THÉORÈME. — *Pour n non inférieur à* 30 *on a*

$$\Pi_1(n) = \frac{\Pi(n).\Pi\left(\frac{n}{30}\right)}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Pi\left(\frac{n}{3}\right)\cdot\Pi\left(\frac{n}{5}\right)}$$

$$= \frac{P_1\left(\frac{n}{1}\right)\cdot P_7\left(\frac{n}{7}\right)\cdot P_{11}\left(\frac{n}{11}\right)\cdot P_{13}\left(\frac{n}{13}\right)\cdot P_{17}\left(\frac{n}{17}\right)\cdot P_{19}\left(\frac{n}{19}\right)\cdot P_{23}\left(\frac{n}{23}\right)\cdot P_{29}\left(\frac{n}{29}\right)\cdot P_{31}\left(\frac{n}{31}\right)\cdots}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)\cdot P_{10}\left(\frac{n}{10}\right)\cdot P_{12}\left(\frac{n}{12}\right)\cdot P_{15}\left(\frac{n}{15}\right)\cdot P_{18}\left(\frac{n}{18}\right)\cdot P_{20}\left(\frac{n}{20}\right)\cdot P_{24}\left(\frac{n}{24}\right)\cdot P_{30}\left(\frac{n}{30}\right)\cdot P_{36}\left(\frac{n}{36}\right)\cdots}$$

$$= \frac{P_1(n)}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)} \times \frac{P_7\left(\frac{n}{7}\right)}{P_{10}\left(\frac{n}{10}\right)} \times \ldots = P_1(n) \times \frac{P_7\left(\frac{n}{7}\right)}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)} \times \ldots .$$

Démonstration. — Pour le voir, il suffit de remplacer $\Pi(n)$, $\Pi\left(\frac{n}{2}\right)$, $\Pi\left(\frac{n}{3}\right)$, $\Pi\left(\frac{n}{5}\right)$, $\Pi\left(\frac{n}{30}\right)$

par leurs valeurs tirées de l'équation (b), puis de supprimer haut et bas les facteurs communs. Au numérateur les diviseurs de n sont les termes des huit formules

$$30k + 1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,$$

où l'on fait $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Au dénominateur les diviseurs de n sont les termes des huit formules

$$30k + 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30,$$

où l'on fait $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Il est à remarquer que dans les suites

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, \\ 6, & 10, & 12, & 15, & 18, & 20, & 24, & 30, \end{array}$$

le nombre inférieur surpasse le supérieur correspondant. C'est le contraire dans les suites

$$\begin{array}{cccccccc} 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31, \\ 6, & 10, & 12, & 15, & 18, & 20, & 24, & 30. \end{array}$$

Cette remarque conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Pour n non inférieur à 30 on a*

$$\Pi_1(n) < P_1(n), \quad \Pi_1(n) > \frac{P_1(n)}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)}.$$

Démonstration. — Cela résulte de ce que l'on a

$$\frac{P_a\left(\frac{n}{a}\right)}{P_{(a+b)}\left(\frac{n}{a+b}\right)} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{P_{(a+b)}\left(\frac{n}{a+b}\right)}{P_a\left(\frac{n}{a}\right)} < 1.$$

Remarque. — Il est bon de chercher ce qui arrive quand n est inférieur à 30; alors, dans la valeur de $\Pi_1(n)$ on fait $P_n\left(\frac{n}{n}\right) = 1$, et quand a surpasse n, on supprime le facteur $P_a\left(\frac{n}{a}\right)$. Dans ce cas, le tableau suivant fait voir que quand les inégalités précédentes ne sont pas satisfaites, elles doivent être remplacées par des égalités, de sorte qu'on peut s'en servir également dans les démonstrations qui suivront.

8. Valeurs des quantités $\Pi(n)$, $P_1(n)$ et $\Pi_1(n)$ pour n non supérieur à 30 :

$\Pi(1) = 1$
$\Pi(2) = 2$
$\Pi(3) = 2.3$
$\Pi(4) = 2^3.3$
$\Pi(5) = 2^3.3.5$
$\Pi(6) = 2^4.3^2.5$
$\Pi(7) = 2^4.3^2.5.7$
$\Pi(8) = 2^7.3^2.5.7$
$\Pi(9) = 2^7.3^4.5.7$
$\Pi(10) = 2^8.3^4.5^2.7$
$\Pi(11) = 2^8.3^4.5^2.7.11$
$\Pi(12) = 2^{10}.3^5.5^2.7.11$
$\Pi(13) = 2^{10}.3^5.5^2.7.11.13$
$\Pi(14) = 2^{11}.3^5.5^2.7^2.11.13$
$\Pi(15) = 2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13$
$\Pi(16) = 2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13$
$\Pi(17) = 2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13.17$
$\Pi(18) = 2^{16}.3^8.5^3.7^2.11.13.17$
$\Pi(19) = 2^{16}.3^8.5^3.7^2.11.13.17.19$
$\Pi(20) = 2^{18}.3^8\ 5^4.7^2.11.13.17.19$
$\Pi(21) = 2^{18}.3^9.5^4.7^3.11.13.17.19$
$\Pi(22) = 2^{19}.3^9.5^4.7^3.11^2.13.17.19$
$\Pi(23) = 2^{19}.3^9.5^4.7^3.11^2.13.17.19.23$
$\Pi(24) = 2^{22}.3^{10}.5^4.7^3.11^2.13.17.19.23$
$\Pi(25) = 2^{22}.3^{10}.5^6.7^3.11^2.13.17.19.23$
$\Pi(26) = 2^{23}.3^{10}.5^6.7^3.11^2.13^2.17.19.23$
$\Pi(27) = 2^{23}.3^{13}.5^6.7^3.11^2.13^2.17.19.23$
$\Pi(28) = 2^{25}.3^{13}.5^6.7^4.11^2.13^2.17.19.23$
$\Pi(29) = 2^{25}.3^{13}.5^6.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29$
$\Pi(30) = 2^{26}.3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29$

$P_1(1) = 1$
$P_1(2) = 2$
$P_1(3) = 2.3$
$P_1(4) = 2^2.3$
$P_1(5) = 2^2.3.5$
$P_1(6) = 2^2.3.5$
$P_1(7) = 2^2.3.5.7$
$P_1(8) = 2^3.3.5.7$
$P_1(9) = 2^3.3^2.5.7$
$P_1(10) = 2^3.3^2.5.7$
$P_1(11) = 2^3.3^2.5.7.11$
$P_1(12) = 2^3.3^2.5.7.11$
$P_1(13) = 2^3.3^2.5.7.11.13$
$P_1(14) = 2^3.3^2.5.7.11.13$
$P_1(15) = 2^3.3^2.5.7.11.13$
$P_1(16) = 2^4.3^2.5.7.11.13$
$P_1(17) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17$
$P_1(18) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17$
$P_1(19) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$
$P_1(20) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$
$P_1(21) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$
$P_1(22) = 2^4.3^2.5.7.11.13.1.719$
$P_1(23) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19.23$
$P_1(24) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19.23$
$P_1(25) = 2^4.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$
$P_1(26) = 2^4.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$
$P_1(27) = 2^4.3^3\ 5^2.7.11.13.17.19.23$
$P_1(28) = 2^4.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23$
$P_1(29) = 2^4.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23.29$
$P_1(30) = 2^4.3^3.5.7.11.13.17.19.23.29$

$\Pi_1(1) = 1$
$\Pi_1(2) = 2$
$\Pi_1(3) = 2.3$
$\Pi_1(4) = 2^2.3$
$\Pi_1(5) = 2^2.3.5$
$\Pi_1(6) = 2^2\ 3.5$
$\Pi_1(7) = 2^2.3.5.7$
$\Pi_1(8) = 2^3.3.5.7$
$\Pi_1(9) = 2^3.3^2.5.7$
$\Pi_1(10) = 2^3.3^2.5.7$
$\Pi_1(11) = 2^3.3^2.5.7.11$
$\Pi_1(12) = 2^3.3^2.5.7.11$
$\Pi_1(13) = 2^3.3^2.5.7.11.13$
$\Pi_1(14) = 2^3.3^2.5.7.11.13$
$\Pi_1(15) = 2^3.3^2.5.7.11.13$
$\Pi_1(16) = 2^4.3^2.5.7.11.13$
$\Pi_1(17) = 2^4.3^2.5.7.11.13$
$\Pi_1(18) = 2^4.3.5.7.11.13$
$\Pi_1(19) = 2^4.3.5.7.11.13$
$\Pi_1(20) = 2^3.3.5.7.11.13.17.19$
$\Pi_1(21) = 2^3.3^2.5.7.11.13.17.19$
$\Pi_1(22) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$
$\Pi_1(23) = 2^4.3^2.5.7.11.13.17.19.23$
$\Pi_1(24) = 2^3.3^2.5.7.11.13\ 17.19.23$
$\Pi_1(25) = 2^3.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$
$\Pi_1(26) = 2^3.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$
$\Pi_1(27) = 2^3.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23$
$\Pi_1(28) = 2^4.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23$
$\Pi_1(29) = 2^4.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23.29$
$\Pi_1(30) = 2^3.3^2.5.7.11.13.17.19.23.29$

Une conséquence de ces valeurs, c'est qu'on a toujours $\Pi_1(n)$ égal à $P_1(n)$ ou plus petit que $P_1(n)$ jusqu'à $n = 8$ inclusivement.

9. Théorème. — *On a, quel que soit le nombre n,*

$$(c) \qquad \Pi_1(n).\Pi_1\left(\frac{n}{6}\right).\Pi_1\left(\frac{n}{6^2}\right)\ldots > P_1(n) > \Pi_1(n),$$

le dernier facteur du premier membre répondant à la plus grande valeur de i qui donne $\frac{n}{6^i}$ non inférieur à l'unité.

Démonstration. — C'est une conséquence des inégalités

$$\Pi_1(n) > \frac{P_1(n)}{P_1\left(\frac{n}{6}\right)}, \quad \Pi_1\left(\frac{n}{6}\right) > \frac{P_1\left(\frac{n}{6}\right)}{P_1\left(\frac{n}{6^2}\right)}, \ldots,$$

multipliées membre à membre, et de ce que, d'après le tableau qui précède, ces inégalités ne peuvent pour $n < 30$ que se réduire à des égalités quand elles ne sont pas satisfaites et que pour $\frac{n}{6^i} < 6$ on a

$$\Pi_1\left(\frac{n}{6^i}\right) = P_1\left(\frac{n}{6^i}\right).$$

Quoique ce procédé semble différer de celui de M. Tchebichew, il revient au même au fond, peut-être est-il plus direct.

Pour passer des limites de $P_1(n)$ à celle de la factorielle $P(n)$ des nombres premiers, on a la proposition suivante :

THÉORÈME. — *On a pour toute valeur de n*

$$\text{(d)}\qquad \frac{P_1(n)}{P_1(\sqrt{n})} > P(n) > \frac{P_1(n)}{[P_1(\sqrt{n})]^2}.$$

Démonstration. — Cela suit des équations

$$P_1(n) = P(n).P(\sqrt{n}).P(\sqrt[3]{n}).P(\sqrt[4]{n})\ldots,$$
$$P_1(\sqrt{n}) = P(\sqrt{n}).P(\sqrt[4]{n}).P(\sqrt[6]{n})\ldots,$$

qui donnent

$$\frac{P_1(n)}{P_1(\sqrt{n})} = P(n).P(\sqrt[3]{n}).P(\sqrt[5]{n})\ldots > P(n),$$

$$\frac{P_1(n)}{[P_1(\sqrt{n})]^2} = P(n)\cdot\frac{P(\sqrt[3]{n})}{P(\sqrt{n})}\cdot\frac{P(\sqrt[5]{n})}{P(\sqrt[4]{n})}\cdots < P(n).$$

Il faut bien remarquer que ces inégalités se changent quelquefois en égalités pour de petites valeurs de n.

10. Pour abréger autant que possible ces calculs de limites, on augmente souvent la plus grande et l'on diminue la plus petite. Voici, d'après cela, comment on peut, suivant la méthode de M. Tchebichew, établir qu'il y a des nombres premiers au nombre de k au moins entre n et $n' > n$.

Soit $n' = mn$, le nombre m surpassant l'unité, et représentons par $\varphi(n)$ le logarithme de $P(n)$ ou la somme des logarithmes des nombres premiers non supérieurs à n, cette quantité $\varphi(n)$ n'étant pas connue, mais tombant entre les fonctions $\varphi_0(n) < \varphi(n)$ et $\varphi_1(n) > \varphi(n)$ qui restent les mêmes, quel que soit le nombre n. Si nous admettons que l'on ait $\varphi_0(mn) > \varphi_1(n)$, il en résultera que les quantités

$$\varphi_0(n),\ \varphi(n),\ \varphi_1(n);\quad \varphi_0(mn),\ \varphi(mn),\ \varphi_1(mn)$$

seront rangées par ordre de grandeur et que

$$\varphi_0(mn) - \varphi_1(n) < \varphi(mn) - \varphi(n),$$
$$\varphi(mn) - \varphi(n) < k \log mn,$$

en admettant qu'il y ait k nombres premiers entre m et mn, conduiront à l'inégalité

$$\varphi_0(mn) - \varphi_1(n) < k \log mn.$$

Par conséquent si l'on avait l'inégalité

$$(e) \qquad \varphi_0(mn) - \varphi_1(n) > k \log mn,$$

il faudrait en conclure qu'il y a plus de k nombres premiers compris entre n et mn.

Pour faire usage de cette inégalité, il faut, au moyen du logarithme de $\Pi(n)$ ou de la somme des logarithmes de 1 à n, déduire, comme le fait M. Tchebichew, des limites du logarithme de $P(n)$, ou de la somme des logarithmes des nombres premiers non supérieurs à n.

Les formules de M. Tchebichew supposent l'inégalité

$$\sqrt{2\pi}.n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n.e^{\frac{1}{12n}} > 1.2.3\ldots n > \sqrt{2\pi}.n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

qui se déduisent d'une formule de M. Liouville, celles que nous donnerons ici se déduisent de la formule plus simple

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

où e est la base des logarithmes népériens. Cette dernière formule a été démontrée d'une manière simple et ingénieuse par M. Prouhet à la p. 281 du t. XIX de ces Annales.

MÉMOIRE SUR LES TÉTRAÈDRES.

Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données;

PAR M. PAINVIN.

Présenté à l'Académie en janvier 1862.

1. Dans son Mémoire sur les pyramides, Lagrange aborde le problème suivant : « Déterminer le volume maximum ou minimum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données. » La question a été ramenée à l'étude d'une équation du quatrième degré; mais Lagrange s'est arrêté à ce point. Pour terminer ce problème intéressant, il restait à faire une discussion plus approfondie de cette équation et à signaler les diverses propriétés géométriques des tétraèdres qui satisfont à la condition du maximum.

C'est là l'objet du présent Mémoire.

§ I. — *Théorème préliminaire.*

2. Je commencerai par établir un théorème dont on peut déduire, comme cas particulier, les formules données par Lagrange dans le Mémoire déjà cité.

Soit un déterminant λ; supposons qu'on prenne le déterminant réciproque de λ, puis qu'on fasse le carré de ce déterminant réciproque; maintenant effectuons ces opérations en sens inverse, c'est-à-dire faisons le carré de λ, et prenons ensuite le déterminant réciproque de ce carré; les deux déterminants définitifs obtenus par ces deux séries d'opérations sont identiques élément à élément.

3. Pour démontrer cette proposition, je rappellerai d'abord les propriétés fondamentales bien connues des déterminants réciproques : si P est un déterminant du $n^{ième}$ degré, dont les éléments sont a_{rs}, et que S soit le déterminant réciproque, dont les éléments seront $\alpha_{rs} = \frac{dP}{da_{rs}}$, on a les relations

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} & S = P^{n-1}, \\ & \frac{dS}{d\alpha_{rs}} = P^{n-2} a_{rs}. \end{aligned} \right.$$

Désignons par λ le déterminant :

$$(2)\qquad \lambda = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \ldots & u_1 & v_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \ldots & u_2 & v_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & y_n & z_n & \ldots & u_n & v_n \end{vmatrix},$$

les lettres $x, y, z, \ldots, u, v$ étant en nombre n.

Formons le *déterminant réciproque* de λ ; désignant par L ce nouveau déterminant et posant

$$(3)\quad X_i = \frac{d\lambda}{dx_i}, \quad Y_i = \frac{d\lambda}{dy_i}, \quad Z_i = \frac{d\lambda}{dz_i}, \ldots, \quad V_i = \frac{d\lambda}{dv_i},$$

on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & L = \lambda^{n-1} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & \ldots & U_1 & V_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & \ldots & U_2 & V_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n & Y_n & Z_n & \ldots & U_n & V_n \end{vmatrix}, \\ & \frac{dL}{dX_i} = \lambda^{n-2} x_i, \quad \frac{dL}{dY_i} = \lambda^{n-2} y_i, \ldots, \quad \frac{dL}{dV_i} = \lambda^{n-2} v_i. \end{aligned} \right.$$

Formons ensuite le *carré* du déterminant L ; en représentant par M ce troisième déterminant et en posant

$$(5)\qquad A_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + X_i Z_k + \ldots + V_i V_k,$$

on trouve

$$(6)\qquad M = L^2 = \lambda^{2(n-1)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Maintenant effectuons ces opérations dans un ordre inverse, c'est-à-dire formons le carré du déterminant λ (en combinant les lignes et les colonnes comme il a été fait la première fois), puis prenons le réciproque du déterminant ainsi obtenu.

Désignant par $\mathfrak{L}$ le carré du déterminant λ et posant

$$(7)\qquad a_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k + \ldots + v_i v_k,$$

nous aurons

$$(8)\qquad \mathfrak{L} = \lambda^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si l'on représente enfin par $\mathfrak{M}$ le réciproque de $\mathfrak{L}$ et qu'on pose

$$(9)\qquad \alpha_{rs} = \frac{d\mathfrak{L}}{da_{rs}},$$

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{M} = \mathfrak{L}^{n-1} = \lambda^{2(n-1)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \\ &\frac{d\mathfrak{M}}{d\alpha_{rs}} = \mathfrak{L}^{n-2} a_{rs} = \lambda^{2(n-1)} a_{rs}. \end{aligned} \right.$$

4. Il s'agit de démontrer que les déterminants M et $\mathfrak{M}$ sont identiques élément à élément.

Le déterminant (8) nous fournit le groupe des relations

$$(11)\quad \begin{cases} a_{k1}\alpha_{i1} + a_{k2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{kn}\alpha_{in} = 0, \\ a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i1}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in} = \lambda^2. \end{cases}$$

Remarquons, d'un autre côté, que

$$(12)\quad \begin{cases} a_{1k}X_1 + a_{2k}X_2 + a_{3k}X_3 + \ldots + a_{nk}X_n = \lambda x_k, \\ a_{1k}Y_1 + a_{2k}Y_2 + a_{3k}Y_3 + \ldots + a_{nk}Y_n = \lambda y_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

car, en ayant égard aux valeurs (7), le premier membre de la première égalité, par exemple, devient

$$\begin{aligned} & x_k(x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n) \\ & + y_k(y_1X_1 + y_2X_2 + \ldots + y_nX_n) + \ldots \\ & + v_k(v_1X_1 + v_2X_2 + \ldots + v_nX_n), \end{aligned}$$

ou, d'après les formules (3),

$$\begin{aligned} & x_k\left(x_1\frac{d\lambda}{dx_1} + x_2\frac{d\lambda}{dx_2} + \ldots + x_n\frac{d\lambda}{dx_n}\right) \\ & + y_k\left(y_1\frac{d\lambda}{dx_1} + y_2\frac{d\lambda}{dx_2} + \ldots + y_n\frac{d\lambda}{dx_n}\right) + \ldots = \lambda x_k. \end{aligned}$$

Faisons alors, dans les égalités (11), $k = 1, 2, \ldots, n$ et multiplions les relations obtenues respectivement par X_1, $X_2, \ldots, X_n$, ou par $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$, puis ajoutons, en faisant intervenir les formules (12), on arrive aux relations importantes

$$(13)\quad \begin{cases} x_1\alpha_{i1} + x_2\alpha_{i2} + \ldots + x_n\alpha_{in} = \lambda X_i, \\ y_1\alpha_{i1} + y_2\alpha_{i2} + \ldots + y_n\alpha_{in} = \lambda Y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_1\alpha_{i1} + v_2\alpha_{i2} + \ldots + v_n\alpha_{in} = \lambda V_i. \end{cases}$$

Si maintenant on multiplie ces dernières égalités respec-

tivement par X_k, Y_k,..., V_k et qu'on ajoute, il vient, eu égard à la définition des X_k, Y_k,..., V_k,

$$\lambda \alpha_{ik} = \lambda (X_i X_k + Y_i Y_k + \ldots + V_i V_k),$$

ou

$$(14) \qquad \alpha_{ik} = A_{ik};$$

c'est l'identité qu'il fallait établir.

§ II. — *Formules relatives aux tétraèdres.*

5. Je réunirai dans ce paragraphe diverses formules relatives aux tétraèdres, formules dont nous ferons constamment usage dans la suite de ce Mémoire; quelques-unes de ces relations ont été déjà indiquées plus ou moins explicitement. Le point de départ que je choisis en permet une déduction facile.

Appliquons les formules du premier paragraphe au cas particulier de trois variables, nous avons

$$(1) \qquad \lambda = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \qquad L = \lambda^2 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_i &= \frac{d\lambda}{dx_i}, \\ Y_i &= \frac{d\lambda}{dy_i}, \\ Z_i &= \frac{d\lambda}{dz_i}, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dX_i} = \lambda x_i, \\ \dfrac{dL}{dY_i} = \lambda y_i, \\ \dfrac{dL}{dZ_i} = \lambda z_i, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} M = \lambda^4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ A_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \lambda^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ a_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = \lambda^4 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \\ \alpha_{rs} = \dfrac{d\mathfrak{L}}{da_{rs}}, \quad \dfrac{d\mathfrak{M}}{da_{rs}} = \lambda^2 a_{rs}, \end{cases}$$

et enfin

$$(8)\quad \alpha_{rs} = A_{rs}.$$

6. Regardons x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées rectangulaires d'un point M_1; x_2, y_2, z_2 étant celles d'un point M_2; x_3, y_3, z_3 celles d'un point M_3; on sait que λ est égal à six fois le volume du tétraèdre $OM_1M_2M_3$, O étant l'origine des coordonnées. Mais ici « nous devrons convenir de regarder le volume λ comme *positif* ou comme » *négatif*, suivant que la rotation déterminée par l'ordre » des trois points M_1, M_2, M_3 est ou n'est pas de même

» sens que la rotation déterminée par les trois axes x,
» y, z. »

Nous introduirons les notations suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} 2.\text{aire}\,\mathrm{OM_2M_3} = 2s_1 = \sqrt{f_1},\\ 2.\text{aire}\,\mathrm{OM_3M_1} = 2s_2 = \sqrt{f_2},\\ 2.\text{aire}\,\mathrm{OM_1M_2} = 2s_3 = \sqrt{f_3},\\ 2.\text{aire}\,\mathrm{M_1M_2M_3} = 2s = \sqrt{f},\end{array}\right.$$

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{OM_1} = r_1, & \mathrm{M_2M_3} = \rho_1,\\ \mathrm{OM_2} = r_2, & \mathrm{M_3M_1} = \rho_2,\\ \mathrm{OM_3} = r_3, & \mathrm{M_1M_2} = \rho_3,\end{array}\right.$$

(11)
- A_1 axe du plan OM_2M_3, prolongé à partir du point O, du côté du sommet M_1,
- A_2 axe du plan OM_3M_1, prolongé à partir du point O, du côté du sommet M_2,
- A_3 axe du plan OM_1M_2, prolongé à partir du point O, du côté du sommet M_3,
- A axe du plan $M_1M_2M_3$, prolongé à partir du point O, à l'opposé de la face $M_1M_2M_3$.

7. Pour établir sans ambiguïté la direction des axes, je rappelle que le double de l'aire d'un triangle OAB est représenté par

$$2.\mathrm{OAB} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

(x_1, y_1) étant les coordonnées du point A, (x_2, y_2) celles du point B. « Nous devrons en outre regarder la surface » comme *positive* ou *négative*, suivant que la rotation, » pour aller de A vers B, est ou n'est pas de même sens » que la rotation qui sert à déterminer les angles posi- » tifs. » Quant au sens des angles positifs sur les plans

coordonnés, il sera

$$xy, \quad yz, \quad xz.$$

Maintenant, sachant que la projection d'une surface plane est égale à l'aire de la surface multipliée par le cosinus de l'angle des axes des deux plans, ayant égard à la formule que nous venons de citer et aux deux conventions que nous venons de poser, on constatera, sans difficulté, qu'on a dans tous les cas

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dx_i} = X_i = \sqrt{f_i}\cos(A_i x), \\ \dfrac{d\lambda}{dy_i} = Y_i = \sqrt{f_i}\cos(A_i y), \\ \dfrac{d\lambda}{dz_i} = Z_i = \sqrt{f_i}\cos(A_i z); \end{cases}$$

X_i, Y_i, Z_i ont les valeurs (3); $\sqrt{f_i}$ est le double de la valeur numérique s_i; A_i est l'axe de la face s_i, prolongé, à partir de la face, du côté du sommet opposé à cette face; λ est ici la valeur absolue du volume, et par conséquent a pour expression le déterminant (1) précédé du signe + ou —, suivant que la rotation $M_1 M_2 M_3$ est ou n'est pas de même sens que la rotation xyz. Les axes A_1, A_2, A_3 sont donc nettement définis par les formules (12).

Nous conclurons de suite des formules (10) et (12)

$$(13)\quad \begin{cases} a_{ii} = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = r_i^2; \\ a_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k = r_i r_k \cos(r_i r_k); \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} A_{ii} = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 4 s_i^2 = f_i, \\ A_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k = 4 s_i s_k \cos(A_i A_k) = \sqrt{f_i f_k}\cos(A_i A_k); \end{cases}$$

l'angle $(A_i A_k)$ est le supplément du dièdre formé par les faces s_i, s_k, qui ont respectivement pour axes A_i, A_k.

8. La ligne A est perpendiculaire à la face $M_1M_2M_3$ et prolongée, à partir de l'origine, du côté opposé à cette face. Or le plan de cette face a pour équation

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

je désignerai par P le premier membre de cette équation.

On a d'abord

$$(1^\circ) \qquad x\frac{dP}{dx} + y\frac{dP}{dy} + z\frac{dP}{dz} + \lambda = 0.$$

D'un autre côté, si α, β, γ sont les angles avec les axes positifs de coordonnées de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan et prise dans le sens de l'origine au plan, et si p est la longueur absolue de cette perpendiculaire, l'équation de la face $M_1M_2M_3$ sera aussi

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + r\cos\gamma - p = 0,$$

ou, d'après la définition de l'axe A,

$$(2^\circ) \qquad x\cos(Ax) + y\cos(Ay) + z\cos(Az) + p = 0.$$

La comparaison des équations (1°) et (2°) nous donne

$$\cos(Ax) = \frac{\frac{dP}{dx}}{k}, \qquad \cos(Ay) = \frac{\frac{dP}{dy}}{k},$$

$$\cos(Az) = \frac{\frac{dP}{dz}}{k}, \qquad p = \frac{\lambda}{k}.$$

Or $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dP}{dz}$ sont, en valeur absolue, les projections

de l'aire $2s$ sur les plans yz, xz, xy; donc

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dz}\right)^2 = 4s^2 = f;$$

par suite

$$k^2 = f, \quad k = \pm\sqrt{f}.$$

Mais $p = \frac{\lambda}{k}$; comme p est un nombre absolu et que λ est positif (7), on devra prendre $k = +\sqrt{f}$.

Ainsi, l'axe A sera nettement défini par les relations suivantes :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{f}\cos(\mathrm{A}x) &= \frac{dP}{dx} = -\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\left(\frac{d\lambda}{dx_1} + \frac{d\lambda}{dx_2} + \frac{d\lambda}{dx_3}\right) = -(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3),\\
\sqrt{f}\cos(\mathrm{A}y) &= \frac{dP}{dy} = +\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} = -\left(\frac{d\lambda}{dy_1} + \frac{d\lambda}{dy_2} + \frac{d\lambda}{dy_3}\right) = -(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_3),\\
\sqrt{f}\cos(\mathrm{A}z) &= \frac{dP}{dz} = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -\left(\frac{d\lambda}{dz_1} + \frac{d\lambda}{dz_2} + \frac{d\lambda}{dz_3}\right) = -(\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_3).
\end{aligned}\right.$$

La quantité λ, représentant ici la valeur absolue du volume, aura pour expression le déterminant (1); mais ce déterminant devra être précédé du signe + ou —, suivant que la rotation $M_1 M_2 M_3$ est ou n'est pas de même sens que la rotation xyz.

L'angle (AA_i) est le supplément du dièdre formé par les faces s, s_i, qui ont respectivement pour axes A, A_i.

9. Ces formules vont nous permettre de démontrer plusieurs relations importantes entre les éléments d'un tétraèdre.

Si l'on ajoute les équations (15) membre à membre, après avoir élevé au carré, on trouve, en ayant égard aux relations (14),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} f = f_1 + f_2 + f_3 + 2\sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) \\ + 2\sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) + 2\sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3). \end{aligned}\right.$$

Cette égalité a été signalée par Lagrange. Mais il est important d'établir les relations homologues; on peut le faire de la manière suivante :

$$\sqrt{ff_i}\cos(AA_i) = \sqrt{ff_i}$$
$$\times[\cos(Ax) + \cos(A_i x) + \cos(Ay)\cos(A_i y) + \cos(Az)\cos(A_i z)]$$
$$= -X_i(X_1 + X_2 + X_3) - Y_i(Y_1 + Y_2 + Y_2) - Z_i(Z_1 + Z_2 + Z_3);$$

d'où il résulte, d'après les valeurs (14), en faisant $i = 1$, 2, 3,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} f_1 + \sqrt{ff_1}\cos(AA_1) + \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) + \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) = 0, \\ f_2 + \sqrt{ff_2}\cos(AA_2) + \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) + \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = 0, \\ f_3 + \sqrt{ff_3}\cos(AA_3) + \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) + \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = 0, \\ f + \sqrt{ff_1}\cos(AA_1) + \sqrt{ff_2}\cos(AA_2) + \sqrt{ff_3}\cos(AA_3) = 0. \end{aligned}\right.$$

La dernière relation du groupe (17) s'obtient en ajoutant

les trois premières membre à membre et en ayant égard à l'égalité (16).

Maintenant si l'on ajoute membre à membre trois des égalités (17) et qu'on en retranche la quatrième, on arrive au groupe suivant :

$$
\text{I)}\left\{\begin{array}{l}
f = f_1+f_2+f_3+2\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2)+2\sqrt{f_1f_3}\cos(A_1A_3)+2\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2 \\
f_1 = f_2+f_3+f+2\sqrt{ff_2}\cos(AA_2)+2\sqrt{ff_3}\cos(AA_3)+2\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2 \\
f_2 = f_3+f+f_1+2\sqrt{ff_3}\cos(AA_3)+2\sqrt{ff_1}\cos(AA_1)+2\sqrt{f_1f_3}\cos(A_1 \\
f_3 = f+f_1+f_2+2\sqrt{ff_1}\cos(AA_1)+2\sqrt{ff_2}\cos(AA_2)+2\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1
\end{array}\right.
$$

Ce sont les formules analogues de celles des triangles.

Des formules (17), on déduit les nouvelles relations (je crois qu'elles n'ont pas encore été données) :

$$
(\text{I } bis)\left\{\begin{array}{l}
f+f_1+2\sqrt{ff_1}\cos(AA_1)=f_2+f_3+2\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2A_3), \\
f+f_2+2\sqrt{ff_2}\cos(AA_2)=f_3+f_1+2\sqrt{f_3f_1}\cos(A_3A_1), \\
f+f_3+2\sqrt{ff_3}\cos(AA_3)=f_1+f_2+2\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2).
\end{array}\right.
$$

Les formules (13), (14), (8), (7) et (6) nous fournissent l'expression des dièdres en fonction des arêtes et des angles des faces :

$$
(\text{II})\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2A_3)=r_1^2\, r_2 r_3[\cos(r_1r_2)\cos(r_1r_3)-\cos(r_2r_3)], \\
\sqrt{f_3f_1}\cos(A_3A_1)=r_2^2\, r_3 r_1[\cos(r_2r_1)\cos(r_2r_3)-\cos(r_1r_3)], \\
\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2)=r_3^2\, r_1 r_2[\cos(r_3r_1)\cos(r_3r_2)-\cos(r_1r_2)],
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\sqrt{f_2f_3}\sin(A_2A_3)=\lambda r_1, \\
\sqrt{f_3f_1}\sin(A_3A_1)=\lambda r_2, \\
\sqrt{f_1f_2}\sin(A_1A_2)=\lambda r_3.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Les formules (17) conduiraient aux valeurs des angles AA_1, AA_2, AA_3 ; mais il sera plus simple d'introduire les

de lettres.

Les relations (7), (6), (13) et (14) nous donnent le groupe similaire

$$\text{(II } bis\text{)}\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda^2 r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) &= f_1 \sqrt{f_2 f_3}\,[\cos(A_1 A_2)\cos(A_1 A_3) - \cos(A_2 A_3)], \\ \lambda^2 r_3 r_1 \cos(r_3 r_1) &= f_2 \sqrt{f_1 f_3}\,[\cos(A_2 A_1)\cos(A_2 A_3) - \cos(A_3 A_1)], \\ \lambda^2 r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) &= f_3 \sqrt{f_1 f_2}\,[\cos(A_3 A_1)\cos(A_3 A_1) - \cos(A_1 A_2)]. \end{aligned} \right.$$

10. *Volume.* — Le volume peut s'exprimer à l'aide des arêtes et des angles des faces, ou à l'aide des aires des faces, et des dièdres; les formules (6), (7), (8), (13) et (14) nous conduisent immédiatement à ces expressions.

On a ainsi

$$\text{(III)}\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda^2 &= \begin{vmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) & r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) \\ r_2 r_1 \cos(r_2 r_1) & r_2^2 & r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) \\ r_3 r_1 \cos(r_3 r_1) & r_3 r_2 \cos(r_3 r_2) & r_3^2 \end{vmatrix} = r_1^2 r_2^2 r_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(r_1 r_2) & \cos(r_1 r_3) \\ \cos(r_2 r_1) & 1 & \cos(r_2 r_3) \\ \cos(r_3 r_1) & \cos(r_3 r_2) & 1 \end{vmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{vmatrix} f_1 & \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) & \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) \\ \sqrt{f_2 f_1}\cos(A_2 A_1) & f_2 & \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) \\ \sqrt{f_3 f_1}\cos(A_3 A_1) & \sqrt{f_3 f_2}\cos(A_3 A_2) & f_3 \end{vmatrix} = f_1 f_2 f_3 \begin{vmatrix} 1 & \cos(A_1 A_2) & \cos(A_1 A_3) \\ \cos(A_2 A_1) & 1 & \cos(A_2 A_3) \\ \cos(A_3 A_1) & \cos(A_3 A_2) & 1 \end{vmatrix} \\ \lambda &= r_1 \rho_1 d_1 \sin(r_1 \rho_1) = r_2 \rho_2 d_2 \sin(r_2 \rho_2) = r_3 \rho_3 d_3 \sin(r_3 \rho_3), \end{aligned} \right.$$

La dernière relation de ce groupe est la traduction du théorème bien connu sur le volume du tétraèdre en fonction des arêtes opposées; d_1, d_2, d_3 sont les plus courtes distances des arêtes opposées $(r_1\rho_1)$, $(r_2\rho_2)$, $(r_3\rho_3)$.

10. *Arêtes et angles des faces.* — L'angle de deux arêtes opposées, telles que r_1 et ρ_1 par exemple, s'obtiendra facilement en remarquant que

$$\begin{aligned} r_1\rho_1\cos(r_1\rho_1) &= x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)+z_1(z_2-z_3) \\ &= r_1 r_2\cos(r_1 r_2) - r_1 r_3\cos(r_1 r_3); \end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\text{(IV)}\left\{\begin{aligned} & r_1\rho_1\cos(r_1\rho_1) = r_1 r_2\cos(r_1 r_2) - r_1 r_3\cos(r_1 r_3), \\ & r_2\rho_2\cos(r_2\rho_2) = r_2 r_3\cos(r_2 r_3) - r_2 r_1\cos(r_2 r_1), \\ & r_3\rho_3\cos(r_3\rho_3) = r_3 r_1\cos(r_3 r_1) - r_3 r_2\cos(r_3 r_2); \\ & \text{d'où} \\ & r_1\rho_1\cos(r_1\rho_1) + r_2\rho_2\cos(r_2\rho_2) + r_3\rho_3\cos(r_3\rho_3) = 0. \end{aligned}\right.$$

11. Pour obtenir la plus courte distance des deux arêtes opposées r_1 et ρ_1, je remarque que le plan, passant par M_2M_3 et parallèle à OM_1, a pour équation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus courte distance d_1 sera la distance de l'origine à ce plan, ce qui donne

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2}},$$

ou, en ayant égard aux formules (3) et (14),

$$d_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{(X_2+X_3)^2+(Y_2+Y_3)^2+(Z_2+Z_3)^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{f_2+f_3+2\sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3)}}.$$

On arrive donc au groupe suivant :

$$(\mathrm{V})\quad \left\{ \begin{aligned} d_1^2 &= \frac{\lambda^2}{f_2+f_3+2\sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3)}, \\ d_2^2 &= \frac{\lambda^2}{f_3+f_1+2\sqrt{f_3 f_1}\cos(A_3 A_1)}, \\ d_3^2 &= \frac{\lambda^2}{f_1+f_2+2\sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2)}; \\ &\text{d'où} \\ \frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2} &= \frac{f+f_1+f_2+f_3}{\lambda^2}. \end{aligned} \right.$$

Je ne crois pas que cette dernière relation ait été déjà remarquée.

12. Nous écrirons encore les relations suivantes obtenues par l'application pure et simple des formules de la trigonométrie; il nous sera plus commode de les avoir réunies en un seul tableau

(VI)

$$
\text{O}\begin{cases}
\rho_1^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos(r_2 r_3), \\
\rho_2^2 = r_3^2 + r_1^2 - 2r_1 r_3 \cos(r_1 r_3), \\
\rho_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(r_1 r_2);
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
r_2^2 r_3^2 = f_1 + r_2^2 r_3^2 \cos^2(r_2 r_3), \\
r_3^2 r_1^2 = f_2 + r_3^2 r_1^2 \cos^2(r_3 r_1), \\
r_1^2 r_2^2 = f_3 + r_1^2 r_2^2 \cos^2(r_1 r_2),
\end{cases}
$$

$$
\text{M}_1\begin{cases}
\rho_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^3 - 2\rho_2 \rho_3 \cos(\rho_2 \rho_3), \\
r_2^2 = \rho_3^2 + r_1^2 - 2\rho_3 r_1 \cos(r_1 \rho_3), \\
r_3^2 = \rho_2^2 + r_1^2 - 2r_1 \rho_2 \cos(r_1 \rho_2);
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\rho_2^2 \rho_3^2 = f + \rho_2^2 \rho_3^2 \cos^2(\rho_2 \rho_3), \\
r_1^2 \rho_3^2 = f_3 + r_1^2 \rho_3^2 \cos^2(r_1 \rho_3), \\
r_1^2 \rho_2^2 = f_2 + r_1^2 \rho_2^2 \cos^2(r_1 \rho_2).
\end{cases}
$$

$$
\text{M}_2\begin{cases}
\rho_2^2 = \rho_1^2 + \rho_3^2 - 2\rho_1 \rho_3 \cos(\rho_1 \rho_3), \\
r_3^2 = \rho_1^2 + r_2^2 - 2r_2 \rho_1 \cos(r_2 \rho_1), \\
r_1^2 = \rho_3^2 + r_2^2 - 2r_2 \rho_3 \cos(r_2 \rho_3);
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\rho_1^2 \rho_3^2 = f + \rho_1^2 \rho_3^2 \cos^2(\rho_1 \rho_3), \\
r_2^2 \rho_1^2 = f_1 + r_2^2 \rho_1^2 \cos^2(r_2 \rho_1), \\
r_2^2 \rho_3^2 = f_3 + r_2^2 \rho_3^2 \cos^2(r_2 \rho_3),
\end{cases}
$$

$$
\text{M}_3\begin{cases}
\rho_3^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\rho_1 \rho_2), \\
r_1^2 = \rho_2^2 + r_3^2 - 2r_3 \rho_2 \cos(r_3 \rho_2), \\
r_2^2 = \rho_1^2 + r_3^2 - 2r_3 \rho_1 \cos(r_3 \rho_1),
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\rho_1^2 \rho_2^2 = f + \rho_1^2 \rho_2^2 \cos^2(\rho_1 \rho_2), \\
r_3^2 \rho_2^2 = f_2 + r_2^2 \rho_2^2 \cos^2(r_3 \rho_2), \\
r_3^2 \rho_1^2 = f_1 + r_3^2 \rho_1^2 \cos^2(r_3 \rho_1).
\end{cases}
$$

13. Nous terminerons enfin cette nomenclature en donnant l'expression des distances du centre de gravité du tétraèdre à ses quatre sommets.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G, on a

$$(\text{VII}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \\ \eta &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \\ \zeta &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}; \end{aligned} \right.$$

et si l'on désigne les distances GO, GM_1, GM_2, GM_3 par R, R_1, R_2, R_3, on trouve aisément

$$\left\{ \begin{aligned} 16R^2 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1r_2\cos(r_1r_2) + 2r_1r_3\cos(r_1r_3) + 2r_2r_3\cos(r_2r_3) \\ &= 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2), \\ 16R_1^2 &= r_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + 2r_1\rho_2\cos(r_1\rho_2) + 2r_1\rho_3\cos(r_1\rho_3) + 2\rho_2\rho_3\cos(\rho_2\rho_3) \\ &= 3(r_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2) - (\rho_1^2 + r_2^2 + r_3^2), \\ 16R_2^2 &= \rho_1^2 + r_2^2 + \rho_3^2 + 2\rho_1r_2\cos(\rho_1r_2) + 2\rho_1\rho_3\cos(\rho_1\rho_3) + 2r_2\rho_3\cos(r_2\rho_3) \\ &= 3(\rho_1^2 + r_2^2 + \rho_3^2) - (r_1^2 + \rho_2^2 + r_3^2), \\ 16R_3^2 &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + r_3^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\rho_1\rho_2) + 2\rho_1r_3\cos(\rho_1r_3) + 2\rho_2r_3\cos(\rho_2r_3) \\ &= 3(\rho_1^2 + \rho_2^2 + r_3^2) - (r_1^2 + r_2^2 + \rho_3^2), \end{aligned} \right.$$

d'où

$$4(R^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_2^3) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2.$$

§ III. — *Volume maximum ou minimum d'un tétraèdre dont on donne les aires des faces.*

14. Pour résoudre la question énoncée, prenons l'expression du volume sous la forme donnée par la for-

mule (5, § II):

$$(1)\qquad M = \lambda^4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Remarquons que A_{11}, A_{22}, A_{33} sont des quantités données (14, § II), et que A_{12}, A_{13}, A_{23} sont les seules quantités variables; elles sont en outre liées par la relation (16, § II), c'est-à-dire

$$(2)\qquad A_{12} + A_{13} + A_{23} = -c,$$

en désignant par $2c$ la quantité

$$(3)\qquad 2c = f_1 + f_2 + f_3 - f.$$

Si nous regardons A_{23} comme une fonction de A_{12}, A_{13}, nous aurons, pour les conditions de maximum ou minimum,

$$\frac{dM}{dA_{12}} + \frac{dM}{dA_{23}}\frac{dA_{23}}{dA_{12}} = 0,$$

$$\frac{dM}{dA_{13}} + \frac{dM}{dA_{23}}\frac{dA_{23}}{dA_{13}} = 0;$$

mais on a, d'après la relation (2),

$$\frac{dA_{23}}{dA_{12}} + 1 = 0, \qquad \frac{dA_{23}}{dA_{13}} + 1 = 0;$$

ce qui donne définitivement

$$(4)\qquad \frac{dM}{dA_{12}} = \frac{dM}{dA_{13}} = \frac{dM}{dA_{23}}.$$

Or les déterminants M et $\mathfrak{M}$ [équations (5), (7), (8), § II] sont identiques élément à élément et par suite

$$\frac{dM}{dA_{rs}} = \frac{d\mathfrak{M}}{d\alpha_{rs}} = \lambda^2 . a_{rs};$$

les conditions nécessaires pour l'existence du maximum ou du minimum sont donc

$$a_{12} = a_{13} = a_{23};$$

ou, d'après les équations (13, § II),

$$(5) \qquad r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3);$$

à ces relations, il faut joindre la relation (2).

15. Désignons par $\sqrt{\theta}$ la valeur commune des produits (5), $\sqrt{\theta}$ pouvant être précédé du signe + ou —; nous aurons ainsi

$$(6) \quad r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) = \sqrt{\theta}.$$

On peut toujours supposer qu'on ait pris pour origine des coordonnées le sommet opposé à la plus petite face, et alors c (équation 3) est une quantité positive.

Je remarque que

$$r_2^2 r_3^2 [1 - \cos^2(r_2 r_3)] = f_1, \ldots;$$

de là nous concluons

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} r_2^2 r_3^2 &= f_1 + \theta, \quad \text{d'où} \quad & r_1^4 &= \frac{(\theta + f_2)(\theta + f_3)}{\theta + f_1}, \\ r_3^2 r_1^2 &= f_2 + \theta, & r_2^4 &= \frac{(\theta + f_3)(\theta + f_1)}{\theta + f_2}, \\ r_1^2 r_2^2 &= f_3 + \theta; & r_3^4 &= \frac{(\theta + f_1)(\theta + f_2)}{\theta + f_3}. \end{aligned} \right.$$

Du groupe (III, § II) nous tirons, eu égard aux valeurs (6),

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{23} &= \sqrt{f_2 f_3} \cos(A_2 A_3) = \theta - r_1^2 \sqrt{\theta}, \\ A_{13} &= \sqrt{f_1 f_3} \cos(A_1 A_3) = \theta - r_2^2 \sqrt{\theta}, \\ A_{12} &= \sqrt{f_1 f_2} \cos(A_1 A_2) = \theta - r_3^2 \sqrt{\theta}; \end{aligned} \right.$$

la relation (2) nous donne alors

$$(9) \qquad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \frac{3\theta + c}{\sqrt{\theta}}.$$

Cette égalité nous montre déjà que $\sqrt{\theta}$ doit être précédé du signe $+$, puisque c et θ sont des quantités positives.

Nous éliminerons r_1, r_2, r_3 en élevant au carré les deux membres de la dernière équation, et, en ayant égard aux valeurs (7), on trouve ainsi

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\theta\left[\frac{(\theta+f_2)(\theta+f_3)}{\theta+f_1} + \frac{(\theta+f_3)(\theta+f_1)}{\theta+f_2} + \frac{(\theta+f_1)(\theta+f_2)}{\theta+f_3}\right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. + 6\theta + 4c + 2f\right] = (3\theta + c)^2. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'équation que doit vérifier θ pour que le volume du tétraèdre soit maximum ou minimum. C'est à ce point que Lagrange a conduit la question.

Reste maintenant à savoir quelles sont les racines de l'équation (10) qui conviennent au problème, quel en est le nombre. Le volume devient-il maximum ou minimum? Quelles sont enfin les propriétés géométriques de ces tétraèdres?

C'est principalement en vue de répondre à ces questions que j'ai rédigé ce Mémoire; j'ai dû cependant reprendre d'un peu plus haut les formules relatives aux tétraèdres, afin d'en généraliser le point de départ, et surtout d'en préciser le sens.

Je vais d'abord m'occuper de la discussion des racines de l'équation (10) au point du vue de la question actuelle.

La suite prochainement.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. L. CREMONA,
Professeur à l'Université de Bologne.

Parmi les courbes géométriques à double courbure, la plus simple est la courbe du troisième ordre ou *cubique gauche*, qui est l'intersection de deux hyperboloïdes à une nappe ayant une génératrice droite commune. C'est, je crois, M. Möbius qui s'occupa le premier de cette courbe. Dans son ouvrage classique, *Der barycentrische Calcul* (Leipzig, 1827), il donna une représentation analytique, très-simple et très-heureuse, de la cubique gauche, et démontra le théorème fondamental : « Une tangente mobile de cette courbe décrit, sur un plan osculateur fixe, une conique. »

En 1837, M. Chasles, dans la note XXXIIIe de son admirable *Aperçu historique*, énonça plusieurs propriétés de la cubique gauche; les plus essentielles sont :

« 1° Le lieu géométrique des sommets des cônes du second degré, qui passent tous par six points donnés dans l'espace, renferme la cubique gauche déterminée par ces six points.

» 2° Les tangentes aux différents points d'une cubique gauche forment une surface développable du quatrième ordre.

» 3° Une propriété de sept points d'une cubique gauche. »

Le tome X du *Journal de M. Liouville* (1845) contient un Mémoire de M. Cayley, qui est d'une extrême importance; il y donne les relations qui ont lieu entre l'ordre

d'une courbe gauche, la classe et l'ordre de sa développable osculatrice, le nombre des points et des plans osculateurs stationnaires, le nombre des droites qui passent par un point donné et s'appuient deux fois sur la courbe, etc. Ensuite, l'illustre auteur fait l'application de ses formules à la courbe gauche du troisième ordre, et trouve que :

« 1° La développable osculatrice d'une telle courbe est du quatrième ordre et de la troisième classe.

» 2° Par un point quelconque de l'espace on peut mener *une* droite qui s'appuie deux fois sur la courbe, et un plan quelconque contient *une* droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs. »

M. Seydewitz, dans un Mémoire très-intéressant qui fait partie de l'*Archiv der Mathematik and Physik* (*), a trouvé et démontré, par la pure géométrie, que la cubique gauche est le lieu du point de rencontre de deux droites homologues, dans deux faisceaux homographiques de rayons, dans l'espace. Il en a déduit la construction de la courbe par points, des tangentes et des plans osculateurs, et cette autre propriété, déjà donnée par M. Chasles, que chaque point de la cubique gauche est le sommet d'un cône du second degré passant par la courbe.

L'auteur appelle la courbe gauche du troisième ordre, *conique gauche* (*raumlicher Kegelschnitt*); et, en classant ces courbes selon leurs asymptotes, il propose les noms, que j'ai adoptés, d'*hyperbole gauche* pour la cubique qui a trois asymptotes réelles et distinctes; d'*ellipse gauche* pour la cubique qui a une seule asymptote réelle, les deux autres étant imaginaires; d'*hyperbole parabolique gauche* pour la cubique qui a une asymptote réelle, et les deux autres coïncidentes à l'infini; enfin, de *para-*

(*) X[er] Theil, 2[e] Heft; Greifswald, 1847.

bole gauche pour la cubique qui a un plan osculateur à l'infini.

Dans un beau Mémoire de M. Salmon, *On the classification of curves of double curvature* (*), que je connais seulement depuis peu, on lit que : « Une cubique gauche tracée sur une surface (réglée) du second ordre rencontre en deux points toutes les génératrices d'un même système de génération, et en un seul point toutes les génératrices du deuxième système.

Mais il était réservé à l'illustre auteur de la *Géométrie supérieure* de donner la plus puissante impulsion à la doctrine de ces courbes. Dans une communication à l'Académie des Sciences (**), M. Chasles, avec cette merveilleuse fécondité qui lui est propre, énonça (sans démonstration) un grand nombre de propositions qui constituent une vraie théorie des cubiques gauches. On y trouve notamment :

1° La génération de la courbe, au moyen de deux faisceaux homographiques de rayons, dans l'espace, déjà donnée par M. Seydewitz.

2° La génération de la courbe par trois faisceaux homographiques de plans. Ce théorème est d'une extrême importance; on peut en déduire tous les autres, et il forme la base la plus naturelle d'une théorie géométrique des cubiques gauches.

3° Le théorème : « Par un point donné on ne peut mener que trois plans osculateurs à la cubique gauche; les points de contact de ces trois plans avec la courbe sont dans un plan passant par le point donné. » Ce théorème

---

(*) *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. V. Cambridge, 1850.

(**) *Compte rendu* du 10 août 1857; *voir* aussi le *Journal de M. Liouville*, novembre 1857.

établit la parfaite réciprocité polaire entre la cubique gauche et sa développable osculatrice; ainsi, ces courbes sont destinées à jouer, dans l'espace, le même rôle que les lignes du second ordre dans le plan.

4° Le théorème de M. Möbius, et un théorème plus général sur la nature d'une section plane quelconque de la développable osculatrice de la cubique gauche.

5° Les belles propriétés des hyperboloïdes passant par la courbe, etc.

Dans un Mémoire inséré au tome Ier des *Annali di Matematica pura ed applicata* (Roma, 1858), j'ai démontré, par l'analyse (*), les théorèmes les plus importants du travail cité de M. Chasles, et, outre cela, j'ai donné quelques propositions nouvelles, notamment celle qui constitue la base de la théorie des *plans conjoints* que j'ai développée peu après (**).

Alors parut, dans le *Journal mathématique de Berlin*, un Mémoire de M. Schröter. L'auteur y démontre, par la géométrie pure et avec beaucoup d'habileté, les théorèmes fondamentaux de MM. Möbius, Seydewitz et Chasles; surtout il met en évidence l'identité des courbes gauches du troisième ordre et de la troisième classe. M. Schröter fait observer que quatre points de la cubique gauche et les quatre plans osculateurs correspondants forment deux tétraèdres, dont chacun est, en même temps, inscrit et circonscrit à l'autre; ce qui se rattache à une question ancienne posée par M. Möbius (***).

(*) Je me suis servi d'une représentation analytique de la courbe qui revient au fond à celle de M. Möbius. Mais je ne connaissais pas alors l'ouvrage capital (si peu connu en Italie) de l'éminent géomètre allemand, ni le Mémoire de M. Seydewitz non plus. Ce sont les citations de M. Schröter qui me firent chercher le *Barycentrische Calcul* et l'*Archiv* de M. Grunert. A présent je restitue *unicuique suum*.

(**) *Annali di Matematica*, t. II. Roma, gennajo-febbrajo 1859, § 11.

(***) *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, 3r Band, p. 273.

Quiconque veut aborder l'étude *géométrique* des cubiques gauches doit lire l'important travail de M. Schröter (*).

Ensuite, dans une courte Note, insérée au tome II des *Annali di Matematica* (luglio-agosto 1859), et dans un Mémoire qui fait partie du tome LVIII du *Journal mathématique de Berlin* (publié par M. Borchardt, en continuation du *Journal de Crelle*), j'ai donné d'autres théorèmes sur les mêmes courbes, et particulièrement j'ai étudié la distribution des coniques inscrites dans une surface développable de la troisième classe.

Le Mémoire actuel contient aussi quelques propositions nouvelles; cependant mon but essentiel est de démontrer *géométriquement* les propriétés que j'ai déjà énoncées, avec des démonstrations analytiques ou sans démonstrations, dans mes écrits précédents, et qui se rapportent à la théorie des *plans conjoints* et des *coniques inscrites* dans la développable osculatrice de la cubique gauche.

Je supposerai que le lecteur connaisse les Mémoires, cités ci-dessus, de MM. Chasles et Schröter.

Points conjoints, plans conjoints et droites associées.

1. Si l'on coupe une cubique gauche par un plan arbitraire P, les trois points d'intersection a, b, c forment un triangle inscrit à toutes les coniques, suivant lesquelles le plan P coupe les cônes du second degré qui passent par (*perspectifs à*) la cubique. Deux quelconques de ces cônes ont une génératrice commune qui perce le plan donné en un point d, de manière que les coniques, bases des deux cônes sur P, sont circonscrites au tétragone $abcd$. On voit sans peine que la conique, base d'un troisième

(*) *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, 56r Band, p. 27.

cône quelconque, perspectif à la courbe gauche, ne passe pas par d, mais par a, b, c seulement.

2. Je conçois maintenant un point o dans l'espace, et la droite qui passe par o et s'appuie en deux points (réels ou imaginaires) a et b sur la cubique gauche. Menons par cette droite un plan quelconque P; ce plan rencontrera la cubique en un troisième point c, et un cône quelconque S perspectif à la cubique, suivant une conique K circonscrite au triangle abc. La trace sur P du plan polaire de o, par rapport au cône S, est la droite polaire de o par rapport à K; donc cette trace passe par o', pourvu que o, o' soient conjugués harmoniquement avec a, b. Le point o' est indépendant du cône S; donc les plans polaires de o, par rapport aux cônes perspectifs à la cubique, passent tous par o'. Cherchons à connaître la *classe* de la surface conique enveloppée par ces plans.

Soit d la deuxième intersection de la conique K par la droite oc; le tétragone $abcd$ est évidemment inscrit aussi à la conique K', base du cône S' (du second ordre, perspectif à la cubique), dont le sommet est sur la droite qui joint d au sommet de S. Donc le point o a la même polaire $o'ef$, par rapport aux coniques K, K'. Cette droite ne peut pas être la polaire de o par rapport à la conique, base d'un troisième cône, car il n'y a pas d'autre conique (perspective à la cubique gauche) passant par a, b, c, d. Par conséquent, $o'ef$, c'est-à-dire une droite quelconque menée par o', est l'intersection des plans polaires de o par rapport à *deux* cônes seulement; nous avons ainsi le théorème :

Les plans polaires d'un point donné o, par rapport à tous les cônes de second degré, perspectifs à une cubique gauche, enveloppent un autre cône du second degré, dont le sommet o' est situé sur la droite qui passe par o

et s'appuie sur la cubique en deux points (réels ou imaginaires) a et b.

Les points o, o' sont conjugués harmoniquement avec les points a, b.

Il suit de la dernière partie du théorème, que :

Les plans polaires du point o', par rapport aux mêmes cônes perspectifs à la cubique, enveloppent un autre cône du second degré, dont le sommet est le point o (*).

J'ai nommé *points conjoints*, deux points tels que *o*, *o'*, et *cônes conjoints* les cônes dont *o*, *o'* sont les sommets. Donc :

La droite qui joint deux points conjoints o, o' est toujours une corde (réelle ou idéale) de la cubique gauche. Et le segment oo' est divisé harmoniquement par la courbe.

Chaque point de la droite *oo'* aura son conjoint sur cette même droite; donc :

Toute corde de la cubique gauche est l'axe d'une involution de points (conjoints par couples), dont les points doubles sont sur la cubique (**).

3. On sait, d'après M. Chasles (***), que la cubique gauche donne lieu à un genre intéressant de dualité. Tout point *o*, donné dans l'espace, est l'intersection de trois plans osculateurs de la courbe ; et les trois points de contact sont dans un plan O passant par le point donné.

Réciproquement, tout plan O rencontre la cubique gauche en trois points; et les plans osculateurs en ces points passent par un point *o* du plan donné.

Ainsi, à chaque point *o* correspond un plan O, et *vice*

(*) *Annali di Matematica,* t. II, § 11. Roma, gennajo-febbrajo 1859.
(**) *Annali, etc., ut supra,* § 5, 6, 7.
(***) *Compte rendu* du 10 août 1857, § 40, 41 et 48.

versâ. J'ai nommé le point *o* *foyer* de son plan focal O. Un plan passe toujours par son foyer.

Si le foyer parcourt une droite, le plan focal tourne autour d'une autre droite, et si le foyer parcourt la deuxième droite, le plan passe toujours par la première. On nomme ces droites *réciproques*.

De plus, j'appelle *focale* d'un point *o* la corde de la cubique gauche qui passe par *o*; et *directrice* d'un plan O la droite qui existe dans ce plan et qui est l'intersection de deux plans osculateurs, réels ou imaginaires. La directrice d'un plan et la focale du foyer de ce plan sont deux droites réciproques (*).

En conséquence de cette dualité, les théorèmes démontrés ci-dessus donnent les suivants :

Les pôles d'un plan donné O, *par rapport à toutes les coniques inscrites dans la développable* (*de la troisième classe et du quatrième ordre*) *osculatrice d'une cubique gauche, sont sur une autre conique. Le plan* O′ *de cette conique rencontre le plan* O *suivant une droite, qui est l'intersection de deux plans osculateurs* (*réels ou non*) *de la cubique.*

Ces deux plans osculateurs divisent harmoniquement l'angle des plans O, O′.

Et les pôles du plan O′, *par rapport aux mêmes coniques inscrites, sont sur une autre conique située dans le plan* O (**).

J'ai nommé ces plans *conjoints*, et je dis *conjointes* aussi les coniques locales situées dans ces plans.

Deux plans conjoints s'entrecoupent toujours suivant une droite qui est l'intersection de deux plans oscula-

---

(*) *Annali, etc., ut supra*, § 2, 3, 7, 8.

(**) *Annali di Matematica*, t. I, § 27, settembre-ottobre 1858; t. II, § 5, 7, gennajo-febbrajo 1859.

teurs (réels ou non) de la cubique gauche. Les plans conjoints et les plans osculateurs forment un faisceau harmonique.

Toute droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche est l'axe d'une infinité de couples de plans conjoints en involution. Les plans doubles de cette involution sont les deux plans osculateurs (*).

On peut démontrer directement ces théorèmes avec la même facilité que les propriétés relatives aux points conjoints (2).

Si une droite s'appuie sur la cubique gauche en deux points, sa réciproque est l'intersection des plans osculateurs en ces points; donc :

Deux points conjoints sont les foyers de deux plans conjoints, et, réciproquement, deux plans conjoints sont les plans focaux de deux points conjoints.

Toute droite qui s'appuie sur la cubique gauche en deux points contient les foyers d'une infinité de couples de plans conjoints, qui passent tous par une même droite. Cette droite est l'intersection des plans osculateurs aux points où la courbe est rencontrée par la droite donnée.

Par une droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche, passent les plans focaux d'une infinité de couples de points conjoints situés sur la droite qui joint les points de contact de deux plans osculateurs (**).

Si, au lieu de l'intersection de deux plans osculateurs distincts, on prend une tangente de la cubique gauche, tout plan (tangent) mené par cette droite a pour conjoint

---

(*) *Annali di Matematica*, t. II, § 7, gennajo-febbrajo 1859.

(**) *Annali di Matematica*, t. II, § 11, 6, gennajo-febbrajo 1859.

le plan osculateur qui passe par la même tangente. Et le lieu des pôles du plan tangent, par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice, est une conique qui a un double contact avec la conique *inscrite* située dans le plan osculateur (conjoint au plan tangent).

De même, tout point donné sur une tangente de la cubique gauche a pour conjoint le point de contact, et l'enveloppe des plans polaires du point donné, par rapport aux cônes du second degré perspectifs à la cubique, est un autre cône du second degré qui est doublement tangent au cône perspectif dont le sommet est le point de contact de la droite tangente avec la courbe gauche.

4. Un point quelconque o, donné dans l'espace, est le sommet d'un cône du troisième ordre et de la quatrième classe, qui passe par la cubique gauche. La droite *focale* de o est la génératrice double du cône; les plans osculateurs menés par o sont ses plans stationnaires. Les génératrices de contact de ces plans, c'est-à-dire les génératrices d'inflexion, sont dans un même plan, qui est le plan *focal* de o (*).

Or, par un théorème connu sur les courbes planes (**), ce plan focal est le plan polaire de la génératrice double, par rapport au trièdre formé par les plans stationnaires; donc :

La focale d'un point donné, par rapport à une cubique gauche, est la polaire du plan focal de ce point, par rapport au trièdre formé par les plans osculateurs de la cubique, menés du point donné.

D'où, par le principe de dualité, on conclut que :

La directrice d'un plan donné, par rapport à une cu-

(*) *Compte rendu* du 10 août 1857, § 17, 18. — ***Annali di Matematica***, t. I, § 6, maggio-giugno, 1858.

(**) SALMON, *Higher plane curves*, p. 171. Dublin, 1852.

bique gauche, est la polaire du foyer de ce plan, par rapport au triangle formé par les points où la cubique est rencontrée par le plan donné (*).

Soit O un plan donné; o son foyer; a, b, c les points d'intersection de la cubique par ce plan. Les droites ao, bo, co seront les traces, sur O, des plans osculateurs aux points a, b, c. Soient λ, μ, ν les points où ao, bo, co rencontrent bc, ca, ab respectivement; α, β, γ les points d'intersection de bc et $\mu\nu$, de ca et $\nu\lambda$, de ab et $\lambda\mu$. Les points α, β, γ seront sur une ligne droite qui est la polaire harmonique de o, par rapport au triangle abc, c'est-à-dire qu'elle est la *directrice* du plan O.

5. Une droite, telle que ao, qui passe par un point de la cubique gauche, et qui est située dans le plan osculateur correspondant, a des propriétés remarquables. Avant tout, elle est réciproque d'elle-même; d'où il suit que tout plan, mené par une telle droite, a son foyer sur la même droite.

Soit A la droite tangente à la cubique en a. La droite ao rencontrera A et une autre tangente A' de la cubique; soit a' le point de contact. Si l'on veut trouver A', a', il suffit de concevoir l'hyperboloïde passant par la cubique gauche et par ao. Il est évident que cet hyperboloïde contient A; donc il contiendra une autre tangente (**); c'est A'. Les génératrices de cette surface, dans le système auquel appartient A, s'appuient sur la cubique gauche, chacune en deux points; ces couples de points forment une involution, dont a, a' sont les points doubles (***).

(*) *Annali di Matematica*, t. II, § 3, gennajo-febbrajo 1859.

(**) *Compte rendu, etc., u. s.*, § 23.

(***) *Compte rendu, etc., u.s.*, § 22.—*Annali di Matematica*, t. I, § 3, 18, maggio-giugno, 1858.

Si u, v, w sont trois points donnés de la cubique gauche, l'hyperboloïde, dont il s'agit, est engendré par les faisceaux homographiques A $(u, v, w, \ldots)$, A' $(u, v, w, \ldots)$. Dans ces faisceaux, au plan Aa' (tangent à la cubique en a et sécant en a') correspond le plan A'a' (osculateur en a'); et au plan A'a (tangent en a' et sécant en a) correspond le plan Aa (osculateur en a). Donc, l'hyperboloïde est touché, en a et a', par les plans osculateurs à la cubique; de plus, les génératrices, dans l'autre système, passant par a et a' sont la droite intersection des plans Aa, A'a (c'est-à-dire ao), et la droite intersection des plans A'a', Aa' (que nous désignerons par $a'o'$).

Donc, la droite ao détermine cette autre droite $a'o'$ qui, comme la première, passe par un point a' de la cubique et est située dans le plan osculateur correspondant. La première droite est l'intersection du plan osculateur en a par le plan sécant en a et tangent en a'; la deuxième droite est l'intersection du plan osculateur en a' par le plan sécant en a' et tangent en a. Ces deux droites et les droites tangentes en a, a' à la cubique forment un quadrilatère gauche (dont ao, $a'o'$ sont deux côtés opposés) qui est tout entier sur la surface d'un hyperboloïde passant par la cubique gauche, et qui appartient aussi (par le principe de dualité) à un autre hyperboloïde, inscrit dans la développable osculatrice de la cubique.

Nous pouvons donner à ces droites ao, $a'o'$, dont chacune détermine complétement l'autre, le nom de *droites associées*.

6. Chaque génératrice M de l'hyperboloïde passant par la courbe gauche, dans le système (A, A'), rencontre celle-ci en deux points i, j et les droites ao, $a'o'$ en deux autres points ω, ω'. Or, j'observe que les points de la cubique a, a'; i, j sont conjugués harmoniques, parce

que a, a' sont les éléments doubles d'une involution, dont i, j sont deux éléments conjugués. Donc, si nous concevons une autre génératrice N du même hyperboloïde, dans le système (A, A', M), les plans N (a, a', i, j) formeront un faisceau harmonique. Mais ces plans sont percés par la droite M en ω, ω', i, j; donc la corde ij est divisée harmoniquement par ao, $a'o'$ en ω, ω'. Ainsi nous avons démontré ce théorème :

Si l'on se donne deux droites associées, par rapport à la cubique gauche, chaque point de l'une a son conjoint sur l'autre; c'est-à-dire, *toute corde de la cubique gauche qui rencontre l'une des deux droites associées rencontre aussi l'autre, et est divisée harmoniquement par les mêmes droites* (*).

On en conclut le théorème corrélatif :

Deux droites associées étant données, chaque plan passant par l'une a son conjoint qui passe par l'autre; c'est-à-dire, *toute droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche et qui rencontre l'une des deux droites associées, rencontre aussi l'autre, et détermine avec ces droites deux plans qui divisent harmoniquement l'angle des plans osculateurs.*

7. Reprenons la construction du n° 4. La droite bc est une corde de la cubique gauche; elle est dans un même plan avec ao, donc elle rencontrera aussi $a'o'$ (associée à ao). Mais $a'o'$ doit être dans le plan O' conjoint au plan donné O; de plus, l'intersection des plans O, O' est la droite $\alpha\beta\gamma$; donc $a'o'$ passe par α. Soient a', b', c' les points où la cubique gauche est rencontrée par le plan O'; o' le foyer de O'; $a'o'$, $b'o'$, $c'o'$ seront les droites associées à ao, bo, co respectivement, c'est-à-dire

(*) *Journal für die reine und ang. Mathematik*, Band 58, § 14. Berlin, 1860.

les traces, sur O′, des plans osculateurs en a', b', c'. Il suit de ce qui précède, que les droites $a'o'$, $b'o'$, $c'o'$ rencontrent la *directrice* commune des plans O, O′ en α, β, γ; d'où, par analogie, on conclut que ao, bo, co coupent cette même directrice aux points α', β', γ', où elle est rencontrée par $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$. Les points α, α', β, β', γ, γ' sont en involution, car ces points sont les intersections d'une même transversale par les six côtés du tétragone complet $abco$; donc :

Les six plans osculateurs, qu'on peut mener à la cubique gauche par deux points conjoints, rencontrent toute droite, qui est l'intersection de deux plans osculateurs, en six points en involution.

Et, par conséquent :

Les six points où la cubique gauche est rencontrée par deux plans conjoints, sont en involution, c'est-à-dire que, *les six plans menés par ces points et par une même corde de la cubique forment un faisceau en involution* (*).

Dans l'involution α, α', ..., γ', les trois points α, β, γ sont suffisants pour déterminer α', β', γ'. En effet, par les propriétés connues du tétragone complet, α' est conjugué harmonique de α, par rapport à β, γ; β' est conjugué harmonique de β, par rapport à γ, α; et γ' est conjugué harmonique de γ, par rapport à α, β. De même, on peut dire que, sur la cubique gauche, a', b', c' sont conjugués harmoniques de a, b, c, par rapport à b, c; c, a; a, b, respectivement. Ainsi, il y a une parfaite correspondance entre les points a et a', b et b', c et c'.

Nous avons vu que $a'o'$ est l'intersection du plan osculateur en a' par le plan tangent en a et sécant en a'. Donc ce dernier plan passe par α, et sa trace sur le plan O est $a\alpha$. De même, $b\beta$ est la trace du plan tangent

(*) *Annali di Matematica*, t. I, § 27, settembre-ottobre 1858.

en b et sécant en b', et $c\gamma$ est la trace du plan tangent en c et sécant en c'. Ces trois traces forment un triangle lmn homologique au triangle abc; le foyer o est le centre d'homologie, et la directrice $\alpha\beta\gamma$ est l'axe d'homologie.

8. La droite oo' est la focale de o et o', donc elle est une corde de la cubique gauche; soient i, j les points où oo' rencontre cette courbe; on a démontré que oo' est divisée harmoniquement par i, j (2). En conséquence, les quatre plans bc (o, o', i, j) forment un faisceau harmonique. Le premier de ces plans passe par a (c'est le plan O); le second passe par a', car bc et $a'o'$ sont dans un même plan (7); donc les points a, a', i, j forment, sur la cubique gauche, un système harmonique. Il en sera de même des points b, b', i, j, et des points c, c', i, j; donc i, j sont les points doubles de l'involution formée sur la cubique par les points a, a', b, b', c, c'.

Or, ces six points résultent des deux plans conjoints O, O'; donc si, par la même directrice $\alpha\beta\gamma$, on mène deux autres plans conjoints, nous aurons une autre involution de six points, qui aura les mêmes points doubles, car i, j dépendent de la droite $\alpha\beta\gamma$ seulement. Donc :

Une droite, intersection de deux plans osculateurs de la cubique gauche, est l'axe d'un faisceau de plans conjoints, deux à deux. Chaque couple de plans conjoints rencontre la cubique en six points en involution, et les involutions correspondantes à tous ces couples constituent une involution unique, car elles ont toutes les mêmes points doubles.

Une corde de la cubique gauche contient une infinité de points conjoints, deux à deux. Chaque couple de points conjoints donne six plans osculateurs en involution; les involutions correspondantes à tous ces couples

constituent une involution unique, car elles ont toutes les mêmes plans doubles.

On sait d'ailleurs que, si on a sur la cubique gauche des couples de points en involution, la droite qui joint deux points conjugués engendre un hyperboloïde (*); donc :

Dans un faisceau de plans conjoints menés par une même directrice, les droites qui joignent les points où chacun de ces plans rencontre la cubique gauche, aux points correspondants dans le plan conjoint, forment un hyperboloïde passant par la courbe.

Dans un système de points conjoints situés sur une même corde de la cubique gauche, les droites intersections des plans osculateurs menés par chacun de ces points, par les plans osculateurs correspondants menés par le point conjoint, forment un hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la courbe gauche (**).

9. Soient d, e, f les points où ao, bo, co rencontrent les droites tangentes à la cubique gauche en a', b', c' respectivement. De même, soient d', e', f' les points où les tangentes à la cubique en a, b, c percent le plan O'. Cherchons à déterminer la conique qui existe dans le plan O, et qui est le lieu des pôles du plan O' par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice de la cubique (3). La conique inscrite, qui est dans le plan osculateur en a', passe évidemment par a' et d'; le point de concours des tangentes en ces points sera le pôle de O' par rapport à cette conique. Mais ce pôle doit être dans le plan O; outre cela, la tangente en a' à la conique inscrite est la tangente à la cubique en ce

(*) *Compte rendu, etc., u. s.*, § 21.
(**) *Annali di Matematica*, t. II, § 10, 11, gennajo-febbrajo 1859.

même point; donc le pôle qu'on cherche est d. Par conséquent, la conique *locale des pôles* passe par d, e, f.

Je vais construire le point d. Observons que le cône du second degré, perspectif à la cubique gauche et ayant son sommet en a', contient les génératrices $a'(a, b, c, a', b', c')$; $a'a'$ exprime la tangente à la cubique en a'. Donc la conique, intersection de ce cône par le plan O, passe par a, b, c, β', γ' et par le point inconnu d (trace de $a'a'$ sur O). Ainsi il suffit d'appliquer le théorème de Pascal (*hexagramma mysticum*) à l'hexagone inscrit $adb\beta'c'\gamma'$; qu'on joigne l'intersection de $b\beta'$ et $a\gamma'$ à l'intersection de ao et $c\beta'$; la droite ainsi obtenue rencontre $c\gamma'$ en un point qui, joint à b, donnera une droite passant par d; d'ailleurs ce point appartient à ao; donc, etc.

Ainsi on peut construire les points d, e, f qui sont les traces, sur O, des droites tangentes à la cubique gauche en a', b', c' : mais les plans osculateurs en ces points passent par les tangentes dont il s'agit; donc, $a'o'$, $b'o'$, $c'o'$ étant les traces de ces plans sur O', leurs traces sur O seront αd, βe, γf.

Le point de concours des plans osculateurs en a, b', c' appartient au plan $ab'c'$; mais ce plan passe par ao, donc (5) son foyer est sur cette droite. Cela revient à dire que βe, γf coupent ao en un même point g. Par consequent, les droites αd, βe, γf forment un triangle ghk homologique au triangle abc; o est le centre et $\alpha\beta\gamma$ l'axe d'homologie.

10. Reprenons la conique suivant laquelle le plan O coupe le cône du second degré, perspectif à la cubique gauche et ayant son sommet en a'. Les plans $a'hk$ et $a'mn$ sont tangents à ce cône; donc la conique susdite est touchée en a par mn et en d par hk. Ces droites tangentes s'entrecoupent en α sur la directrice du plan O; donc le

pôle de cette directrice, par rapport à la conique, est sur ao; par conséquent, ce pôle est le point p conjugué harmonique de α' par rapport à a, d. On trouvera ainsi des points analogues q, r sur bo, co.

On voit aisément que α' est conjugué harmonique de g par rapport à a, p; de p par rapport à g, o; de o par rapport à d, p; de même pour β' et γ'. Le point o est *le* pôle harmonique de la droite $\alpha\beta\gamma$, par rapport à tous les triangles lmn, abc, ghk, pqr, def homologiques entre eux.

11. Continuons à déterminer la conique *locale des pôles*. Les plans osculateurs à la cubique gauche en i, j (8) passent par $\alpha\beta\gamma$; les coniques inscrites (dans la développable osculatrice) qui sont dans ces plans touchent $\alpha\beta\gamma$ en deux points x, y, et jx, iy sont tangentes à la cubique en j, i respectivement. Il s'ensuit que x, y sont les points doubles de l'involution α, α', β, β', γ, γ'. Il est évident aussi que x, y sont les pôles des plans O, O', par rapport aux coniques inscrites mentionnées précédemment; donc les coniques locales des pôles des plans O, O' passent par x, y.

Or l'hyperboloïde, lieu des droites intersections des plans osculateurs en a, a', b, b', c, c',... (8, dernier théorème), contient évidemment les tangentes à la cubique gauche en i, j, c'est-à-dire qu'il passe par x, y. Il passe aussi par d, e, f, car d est un point de l'intersection des plans osculateurs en a, a', etc. Donc la conique locale des pôles du plan O', à laquelle appartiennent les points d, e, f, x, y, est tout entière sur l'hyperboloïde dont nous parlons.

La suite prochainement.

DE LA MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES POUR LE CALCUL DES RACINES DES ÉQUATIONS;

PAR M. LÉON SANCERY,
Professeur au lycée d'Auch.

I.

LEMME. — *Si dans une fonction $\varphi(x)$, algébrique ou transcendante, on remplace x par une certaine valeur x_1, puis successivement par les valeurs x_2, x_3, x_4, x_5,... qu'acquiert cette fonction pour les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4,..., et si les quantités x_1, x_2, x_3,... tendent vers une certaine limite α, α est une racine de l'équation*

$$x = \varphi(x).$$

En effet, en posant

$$x_n = \alpha - h, \quad x_{n+1} = \alpha - h_1,$$

l'identité

$$x_{n-1} = \varphi(x_n)$$

devient

$$\alpha - h_1 = \varphi(\alpha - h) = \varphi(\alpha) - h\varphi'(\alpha - \theta h).$$

Or, h et h_1 étant des quantités qui par hypothèse tendent indéfiniment vers zéro, la relation précédente devient, en passant aux limites, $\alpha = \varphi(\alpha)$. Cela suppose toutefois que $\varphi'(\alpha)$ est une quantité finie et que $\varphi'(x)$ est continue dans le voisinage de $\varphi'(\alpha)$.

II.

Soient actuellement $F(x) = 0$ une équation algé-

brique ou transcendante et x_1 une valeur approchée d'une certaine racine α, en sorte qu'entre x_1 et α il n'y ait pas d'autre racine de l'équation. Mettons $F(x) = 0$ sous la forme $x = \varphi(x)$ et remplaçons dans le second membre x par x_1, puis par la valeur x_2 de $\varphi(x_1)$, puis par la valeur x_3 de $\varphi(x_2)$, et ainsi de suite indéfiniment. Si les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ainsi obtenues forment une suite croissante ou décroissante, chaque terme étant, suivant le cas, supérieur ou inférieur à α ; ou bien, si ces quantités sont alternativement supérieures et inférieures à α, la valeur absolue de la différence de deux valeurs consécutives tendant indéfiniment vers zéro, la limite de ces quantités ne sera autre que la racine α.

III.

Cherchons quelles sont les conditions que doivent remplir la fonction $\varphi(x)$ et la valeur x_1 pour que les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots$ soient toutes supérieures ou inférieures à une racine α de l'équation $x = \varphi(x)$, et pour qu'elles approchent indéfiniment de cette racine.

Des deux égalités

$$\alpha = \varphi(\alpha), \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

on déduit

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n)$$

ou bien

$$\begin{aligned}\alpha - x_{n+1} &= \varphi[x_n + (\alpha - x_n)] - \varphi(x_n)\\ &= (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)].\end{aligned}$$

Pour que x_n, x_{n+1} soient des valeurs approchées dans le même sens de la racine α, $\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$ doit être positif et en outre moindre que l'unité, afin que x_{n+1} soit plus approché que x_n.

Si $\varphi'(\alpha)$ est positif et plus petit que l'unité, il existera,

en supposant $\varphi(x)$ continue dans le voisinage de $\varphi'(\alpha)$, un certain intervalle renfermant la racine α, pour lequel x croissant, la fonction $\varphi'(x)$ sera continuellement croissante ou décroissante, et offrira par conséquent des valeurs supérieures à zéro et plus petites que l'unité. On pourra donc satisfaire à la double inégalité

$$\varphi'(x) \left| \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix} \right.$$

par une infinité de valeurs différentes de α.

Soient L, L′ les limites de cet intervalle, x_n une valeur comprise entre L et L′, et supposons que $\varphi'(x)$ augmente avec x. Si $x_n < \alpha$, on aura, θ étant une certaine fraction positive moindre que 1, $x_n + \theta(\alpha - x_n) < \alpha$, et par conséquent

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \left| \begin{matrix} > 0 \\ < \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right. .$$

Or,

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\, \varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)],$$

donc x_{n+1} est une valeur inférieure à α, mais plus approchée que x_n.

Pareillement de l'inégalité $x_{n+1} < \alpha$ on déduit

$$x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1}) < \alpha,$$

et par conséquent

$$\varphi'[x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1})] \left| \begin{matrix} > 0 \\ < \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right. ;$$

donc x_{n+2} est une valeur inférieure à α et plus approchée que x_{n+1}.

Si $x_n > \alpha$, on aura, θ étant toujours un nombre compris entre 0 et 1, $x_n + \theta(\alpha - x_n) > \alpha$, et par suite

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \left| \begin{matrix} > \varphi'(\alpha) \\ > 1 \end{matrix} \right. ;$$

or,

$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)\,\varphi'\,[x_n + \theta\,(\alpha - x_n)],$$

donc x_{n+1} est une valeur supérieure à α, mais approchant plus de α que x_n. De même la valeur x_{n+1} fournira une valeur x_{n+2} supérieure à α, mais plus approchée que x_{n+1}.

On voit par là que lorsque $\varphi'(\alpha)$ est moindre que 1, on peut trouver des valeurs supérieures ou inférieures à α indifféremment, qui, prises pour valeurs initiales ou de départ, fourniront des valeurs successives de plus en plus approchées de la racine α. Il suffit que les valeurs initiales soient comprises entre les quantités L, L′ qui rendent $\varphi'(x) \left| \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix} \right.$.

Si $\varphi'(\alpha)$ était supérieur à l'unité, il serait impossible de satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \left| \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix} \right.$ à l'aide des valeurs voisines de α.

Si $\varphi'(\alpha) = 1$, on pourra encore satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \left| \begin{matrix} > 0 \\ < 1 \end{matrix} \right.$, à moins que $\varphi'(\alpha)$ ne soit un minimum de $\varphi'(x)$, et par conséquent, trouver une valeur de départ qui fournisse des valeurs de plus en plus approchées de la racine.

Toutefois il est bon de remarquer que l'on n'est pas tenu de prendre pour valeur initiale x_1 une quantité comprise entre L et L′. En effet, pour que la valeur x_2 soit plus approchée que la précédente x_1, il suffit, d'après l'égalité

$$\alpha - x_2 = (\alpha - x_1)\,\varphi'\,[x + \theta\,(\alpha - x_1)]$$

que $\varphi'[x_1 + \theta\,(\alpha - x_1)]$ soit positif et moindre que 1. Or, ce résultat peut être obtenu sans que $\varphi'(x_1)$ soit compris entre 0 et 1. Car si $\varphi'(x)$ croît avec x, et que x_1 soit plus petit que α, $x_1 + \theta\,(\alpha - x_1)$ étant plus grand

que x_1, on aura

$$\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)] > \varphi'(x_1),$$

et par conséquent il peut se faire que $\varphi'(x_1)$ soit négatif et voisin de zéro, tandis que $\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)]$ est positif et moindre que 1. Si $x_1 > \alpha$, comme $x_1 + \theta(\alpha - x_1)$ est plus petit que x_1, on aura

$$\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)] < \varphi'(x_1),$$

et, par suite, il peut arriver que $\varphi'(x_1)$ soit plus grand que 1, en même temps que $\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)]$ est inférieur à l'unité.

En prenant une valeur de départ x_1 ne satisfaisant pas à la condition d'être comprise entre les quantités L et L', on sera tenu de se livrer à une discussion des valeurs successives que l'on obtiendra, afin de montrer qu'elles approchent de plus en plus de la racine α. Toutefois cette discussion ne pourra jamais porter que sur les premières d'entre les valeurs obtenues, car si la méthode est applicable, elle finira par donner des valeurs comprises entre L et L'.

De la relation

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$$

on déduit que la valeur x_{n+1} approchera d'autant plus de α que $\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$ sera plus voisin de zéro, c'est-à-dire que les valeurs successivement obtenues convergeront d'autant plus rapidement vers la racine α que les valeurs de $\varphi'(x)$ seront plus petites. Si $\varphi'(x)$ est une fonction croissante avec x, les valeurs de cette fonction correspondant à des valeurs de x inférieures à α, seront plus petites que les valeurs de cette même fonction relatives à des valeurs de x supérieures à α; il sera donc plus avantageux de choisir entre deux valeurs également

approchées de la racine α, celle qui l'est par défaut. Si au contraire $\varphi'(x)$ est une fonction décroissante quand x croît, il vaudra mieux prendre pour valeur de départ une valeur approchée par excès.

IV.

Établissons les conditions auxquelles doivent satisfaire la fonction $\varphi(x)$ et la quantité x_1 pour que les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$ soient alternativement supérieures et inférieures à α, et que la différence de deux valeurs consécutives tende indéfiniment vers zéro.

Des égalités $\alpha = \varphi(\alpha)$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, on déduit

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)].$$

Pour que les quantités x_{n+1}, x_n soient l'une supérieure, l'autre inférieure à α, les deux différences $\alpha - x_{n+1}$, $\alpha - x_n$ doivent être de signes contraires, et pour cela il faut que $\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$ soit négatif. De plus,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_{n+2} = \varphi(x_{n+1}) = \varphi[x_n + (x_{n+1} - x_n)],$$

on aura donc

$$x_{n+2} - x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta_1(x_{n+1} - x_n)],$$

et afin que $x_{n+2} - x_{n+1}$ ait une valeur absolue moindre que celle de $x_{n+1} - x_n$, il faut que la valeur absolue de $\varphi'[x_n + \theta_1(x_{n+1} - x_n)]$ soit moindre que 1.

Si $\varphi'(\alpha)$ est compris entre 0 et -1, et si $\varphi'(x)$ est une fonction continue dans le voisinage de $\varphi'(\alpha)$, on pourra trouver deux quantités L, L′ comprenant la racine α et telles que, dans l'intervalle L... L′, $\varphi'(x)$ soit continuellement croissante ou décroissante et acquière une valeur négative plus grande que -1. Posons

$$L < \alpha < L'$$

et soit x_n une valeur comprise entre L et L′ de telle sorte que la différence $\alpha - x_n$ soit en valeur absolue moindre que la plus petite des différences $\alpha - L$, $L' - \alpha$. x_n peut être supérieur à α; alors, en admettant que $\varphi'(x)$ soit croissante avec x, on aura

$$\varphi'(x_n) \left| \begin{matrix} < 0 \\ > \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right.,$$

et comme on a

$$x_n + \theta(\alpha - x_n) > \alpha,$$

on aura de même

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \left| \begin{matrix} < 0 \\ > \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right..$$

Donc, d'après l'égalité

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)],$$

la différence $\alpha - x_{n+1}$ sera de signe contraire à $\alpha - x_n$, c'est-à-dire positive et moindre que sa valeur numérique. Conséquemment x_{n+1} sera une valeur plus approchée de α et comprise entre L et L′. De l'inégalité $x_{n+1} < \alpha$, on conclut

$$x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1}) < \alpha,$$

donc

$$\varphi'[x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1})] \left| \begin{matrix} > -1 \\ < \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right.;$$

la valeur $\alpha - x_{n+2}$ sera donc de signe contraire à $\alpha - x_{n+1}$, c'est-à-dire négative et en valeur absolue moindre qu'elle. x_{n+2} est ainsi plus approché que x_{n+1} et nécessairement aussi plus approché que x_n. On arrivera aux mêmes résultats en supposant x_n inférieur à α.

Si $\varphi'(\alpha) < -1$, il est impossible de satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \left| \begin{matrix} < 0 \\ > -1 \end{matrix} \right.$ par des valeurs voisines de α.

Si $\varphi'(x) = -1$, on pourra toujours satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \left| \begin{matrix} < 0 \\ > -1 \end{matrix} \right.$, à moins que $\varphi'(x)$ ne soit un maximum de $\varphi'(x)$.

On vient de voir que si $\varphi'(\alpha) \left| \begin{matrix} < 0 \\ > -1 \end{matrix} \right.$, on peut trouver une valeur de départ qui donne des valeurs de plus en plus approchées de la racine α, alternativement par défaut et par excès. Toutefois, puisqu'il suffit, pour un juste emploi de la méthode, que $\varphi'[x_n + \theta_1 (x_{n+1} - x_n)$ soit compris entre 0 et -1, il est bon de remarquer que cette condition peut être remplie sans qu'on ait

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \left| \begin{matrix} < 0 \\ > -1 \end{matrix} \right. ,$$

ou en valeur absolue $\alpha - x_{n+1} < \alpha - n$, c'est-à-dire sans que la valeur x_n soit située dans le plus petit des deux intervalles $L' \ldots \alpha$, $\alpha \ldots L$ et même sans que $\varphi'(x_n)$ soit compris entre 0 et -1. Mais lorsque la valeur x_n ne sera pas située dans le plus petit des intervalles $L' \ldots \alpha$, $\alpha \ldots L$, une discussion des valeurs successivement obtenues est indispensable. (*La suite prochainement.*)

SOLUTION DES QUESTIONS 622, 621

(voir p. 171);

PAR M. G. BARTET,
Élève du lycée Napoléon (classe de M. Vacquant).

1° *Question* 622 (BOBILLIER).

Je prends pour origine le foyer, pour axe des x l'axe de la courbe génératrice, pour plan des xy un plan perpen-

diculaire au plan sécant; les axes sont d'ailleurs rectangulaires.

L'équation de la courbe méridienne dans le plan des xy est

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \gamma^2;$$

est l'excentricité, $\gamma = 0$ représente la directrice :

$$\gamma = ax + b.$$

La surface de révolution sera représentée par

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2 \gamma^2. \quad (1)$$

e plan sécant a pour équation

$$mx + ny = 1. \quad (2)$$

e cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice courbe représentée par l'ensemble des équations (1) et 2) a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2 [ax + b(mx + ny)]^2.$$

Mise sous cette forme, l'équation montre bien que le ône est de révolution, l'axe étant une droite passant par origine perpendiculaire au plan

$$ax + b(mx + ny) = 0.$$

ette droite sera située dans le plan des xy.

Le pôle du plan représenté par l'équation (2) est un oint du plan xy. Je dis que l'axe du cône passe par ce oint. En effet, considérons la courbe méridienne dans plan des xy; le cône est coupé par le plan des xy suiant deux génératrices FA, FB. Le plan des xy est coupé uivant la droite AB par le plan donné $mx + ny = 1$. enons les tangentes à la courbe méridienne en A et B; it C le pôle ou l'intersection de ces deux tangentes; je

sais que FC est bissectrice de l'angle AFB; d'ailleurs l'axe du cône est aussi bissectrice de cet angle : donc ces deux lignes coïncident (*). C. Q. F. D.

2° *Question* 621 (MANNHEIM).

1° On sait que le lieu du point F, en prenant pour origine le point O et pour axe polaire OX, est représenté par l'équation

$$\rho = \frac{p}{\sin 2\omega},$$

p étant le demi-paramètre de la parabole; on a, sur la figure,

$$F'OY = \omega.$$

Par O je mène une parallèle à l'axe de la parabole, OK qui rencontre la tangente au sommet en K. On sait que

$$YOK = FOX = \omega.$$

D'ailleurs $OK = \frac{p}{2}$, donc $OF' = \frac{p}{2\cos 2\omega}$.

Soit $\omega_1 = F'OX = \omega + \frac{\pi}{2}$, on aura $OF' = \frac{-p}{2\cos 2\omega_1}$.

Faisons tourner dans son plan la courbe OF' d'un angle $\frac{\pi}{4}$, Soit $\omega_2 = \omega_1 + \frac{\pi}{4}$, on aura $OF' = -\frac{p}{2\sin 2\omega_2}$; ainsi après cette rotation le lieu de F' devient homothétique avec celui de F, le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$.

2° Dire que la tangente en F au lieu de F passe en F', c'est dire que la sous-tangente de F est OF'. D'après

(*) M. A. Schnée, élève du lycée Charlemagne, a résolu la même question par un moyen semblable.

une formule connue, on a

$$\text{sous-tang} = -\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{p}{2\cos 2\omega};$$

donc la sous-tangente se confond bien avec OF'.

3° De même OC est la sous-tangente du lieu de F' en F'. En effet, on a

$$\text{sous-tang} = -\frac{\rho^2}{\rho'} = -\frac{p}{4\sin 2\omega_1} = \text{OC};$$

mais

$$\text{OF} = \frac{p}{\sin 2\omega} = -\frac{p}{\sin 2\omega_1},$$

donc

$$\text{OF} = 4\,\text{OC}.$$

C. Q. F. D.

Note. — Des solutions à peu près semblables à celle qui précède nous ont été adressées par MM. L. Abadie; Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne; Frédéric Delafond et G. Mahuet, élèves du lycée de Lyon; G. Halphen, élève du lycée Saint-Louis.

MM. A. Combier, G.-B. (de Florence), J.-J. Hemming, élève de l'Association Polytechnique, à Zurich, ont résolu la même question sans faire usage des coordonnées polaires.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De M. BELTRAMI (de Milan).

Malgré la solution fort ingénieuse que M. Delorme a donnée (cahier de mai) de la question américaine n° 3,

je me permets de vous communiquer la suivante, purement algébrique.

En posant

$$y \sin\alpha + x \cos\alpha = u, \quad y \cos\alpha - x \sin\alpha = v,$$

les deux équations entre lesquelles il faut éliminer φ s'écrivent de la manière suivante

$$u \cos\varphi + v \sin\varphi = 2a \sin\varphi \cos\varphi,$$
$$-u \sin\varphi + v \cos\varphi = 2a (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi);$$

d'où l'on tire, en résolvant par rapport à u et v,

$$u = 2a \sin^3\varphi, \quad v = 2a \cos^3\varphi.$$

De ces équations, on déduit immédiatement

$$u^{\frac{2}{3}} + v^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

C. Q. F. D.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 614;

PAR M. HENRI DELORME.

Je rappelle l'énoncé :

Soit F *le foyer d'une ellipse donnée; en un point* M *de la courbe on mène la tangente, le point* T *où elle coupe le petit axe se projette sur le rayon vecteur* FM *en* Q. *On demande le lieu du point* Q *quand* M *décrit l'ellipse.* (MANNHEIM.)

Je joins FM, et du second foyer F′ j'abaisse sur la

tangente MT une perpendiculaire que je prolonge jusqu'à la rencontre de MF en K. Je joins TK, TF et TF'. J'ai

$$TF = TF' = TK.$$

Donc le triangle TFK est isocèle, et par conséquent le point Q est le milieu de FK. Donc

$$FQ = a.$$

Ainsi le lieu demandé est un cercle décrit du foyer F comme centre avec le demi grand axe pour rayon. Ce cercle passe évidemment par les extrémités du petit axe.

Note. Des solutions géométriques peu différentes nous ont été adressées par M. Jullin, élève du lycée de Mâcon; M. F. Pinsonnière, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Amiot); et par MM. Ch. Kessler et Mogni. M. Mogni remarque : 1° que les projections du point T sur les rayons FM, F'M sont sur une droite qui passe par le centre de l'ellipse; 2° que la même solution convient à l'hyperbole. Dans la parabole, le lieu du point Q est un cercle ayant pour centre le foyer et pour rayon la distance du foyer au sommet de la courbe.

SOLUTION DE LA QUESTION 614;

PAR M. FERFIK,
Capitaine d'Etat-Major (à Constantinople).

Soient c la projection du point C, centre de l'ellipse, sur le rayon vecteur MF; t la projection du point T sur Cc, et m celle de M sur CF; x', y' les coordonnées du point M. Posons

$$Fc = m, \quad cQ = Tt = n, \quad FQ = r, \quad FM = f \quad \text{et} \quad FC = c;$$

On a

$$\frac{m}{c} = \frac{c - x'}{f} \; (*) \quad \text{et} \quad \frac{n}{\left(\frac{b^2}{y'}\right)} = \frac{y'}{f} \; (**) ;$$

d'où

$$r = m + n = \frac{c(c - x')}{f} + \frac{b^2}{f}.$$

On sait que

$$f = a - \frac{cx'}{a};$$

on a

$$r = a\left(\frac{c^2 - cx' + b^2}{a^2 - cx'}\right),$$

et, en remplaçant c^2 par $a^2 - b^2$,

$$r = a.$$

On en conclut que le lieu cherché est un cercle dont le rayon est le demi grand axe a et dont le centre est le foyer F.

SOLUTION DE LA QUESTION 623 (BOBILLIER);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Elève du lycée Charlemagne.

Une droite glisse sur deux autres non situées dans un même plan, de telle sorte que la partie interceptée entre

---

(*) D'après la similitude des triangles FcC, MmF.

(**) Parce que les triangles TCt, MmF sont semblables et qu'en outre $TC = \frac{b^2}{y'}$. (*Notes du Rédacteur.*)

elles soit constamment vue sous un angle droit d'un certain point de l'espace; cette droite engendre une surface gauche du second ordre.

Je prends pour axe des z la plus courte distance des deux droites, et pour plan des xy un plan perpendiculaire à cette plus courte distance en son milieu. Les axes des x et des y sont les bissectrices des angles formés par les projections des deux droites sur le plan des xy.

Cela posé, leurs équations seront

$$(1) \qquad z = k, \quad y = -mx,$$

$$(2) \qquad z = -k, \quad y = mx.$$

Menons un plan par la première,

$$(3) \qquad z - k + \lambda(y + mx) = 0.$$

Menons de même un plan par la seconde,

$$(4) \qquad z + k + \lambda'(y - mx) = 0.$$

L'intersection de ces deux plans représente une droite qui s'appuie à la fois sur les deux autres.

Cherchons les coordonnées des points de rencontre, il suffit de résoudre simultanément les équations (1), (3) et (4), puis (2), (3) et (4). On trouve ainsi pour le premier

$$x = \frac{k}{\lambda' m}, \quad y = -\frac{k}{\lambda'}, \quad z = k,$$

pour le second

$$x = \frac{k}{\lambda m}, \quad y = \frac{k}{\lambda}, \quad z = -k.$$

Soient a, b, c les coordonnées du point donné de l'espace; en écrivant que le carré du premier côté du triangle formé par ce point et les deux points précédents

est égal à la somme des carrés des deux autres, j'exprimerai que la partie interceptée est constamment vue sous un angle droit; on aura donc la relation

$$(5)\left\{\begin{aligned} &\frac{k^2}{m^2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\right)^2+k^2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda'}\right)^2+4k^2\\ &=\left(a-\frac{k}{\lambda' m}\right)^2+\left(b+\frac{k}{\lambda'}\right)^2+(c-k)^2+\left(a-\frac{k}{\lambda m}\right)^2\\ &\quad+\left(b-\frac{k}{\lambda}\right)^2+(c+k)^2.\end{aligned}\right.$$

Eliminons λ et λ' entre les équations (3), (4) et (5), nous aurons l'équation de la surface. On trouve, après réductions,

$$(6)\left\{\begin{aligned} &m^2k^2(m^2-1)x^2-k^2(m^2-1)y^2\\ &+m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)z^2+2kmayz+2km^3bzx\\ &+2k^2m^2ax+2k^2m^2by-m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)k^2=0\ (*).\end{aligned}\right.$$

C'est une surface du second ordre, et elle est gauche, puisqu'elle est engendrée par une droite s'appuyant sur deux autres qui ne se rencontrent pas.

(*) Cette équation représente, dans le cas le plus général, un hyperboloïde à une nappe dont le centre a pour coordonnées

$$x=\frac{-a}{m^2-1},\quad y=\frac{m^2 b}{m^2-1},\quad z=0.$$

Dans les cas particuliers, elle représente un paraboloïde hyperbolique, le système de deux plans, etc. Nous engageons M. Schnée à discuter l'équation qu'il a obtenue. (*Note du Rédacteur.*)

QUESTION 493

(voir tome VIII, page 444).

Soit P *un point d'une courbe* A; C *le centre de courbure en* P; O *un point fixe, origine des rayons vecteurs;* CD *perpendiculaire à* CP; *et* D *le point d'intersection de* CD *avec le rayon vecteur* PO, *ou bien avec son prolongement. Si le rayon de courbure de la courbe* A *est proportionnel à une puissance* n *quelconque de la perpendiculaire conduite de l'origine* O *sur la tangente à la courbe, le rayon de courbure de la développée de* A *et correspondant au point* C *sera égal à* $n.\mathrm{CD}$.

Généralisation et Solution par M. SACCHI (de Milan).

Que l'on tire OQ perpendiculaire à CP; OQ et QP seront les longueurs des perpendiculaires conduites de O sur la normale et sur la tangente à la courbe A en P.

En posant

$$\mathrm{QP} = p,\quad \mathrm{OQ} = q,\quad \mathrm{OP} = r,\quad \mathrm{CP} = \mathrm{R},$$

et en nommant R_1 le rayon de courbure de la développée, α l'angle compris entre R et un axe fixe, et en désignant avec un accent la dérivée par rapport à α, on aura les formules connues

$$(1)\qquad \mathrm{R}' = \mathrm{R}_1,\quad p' = q,$$

et à cause des triangles semblables PCD, PQO,

$$(2)\qquad \mathrm{CD} = \frac{q}{p}\,\mathrm{R}.$$

Or, a indiquant une constante et n un nombre quelcon-

que, on a par hypothèse

$$(3) \qquad R = ap^n,$$

et en prenant la dérivée par rapport à α, eu égard aux relations (1), (2), (3), on obtient

$$R_1 = n \cdot CD,$$

laquelle démontre la proposition énoncée. Le rayon de courbure R_1 doit être porté de C vers D, ou bien en sens contraire, suivant que n est positif ou négatif.

Si dans l'équation (3) on remplace R par sa valeur $\frac{rr'}{p'}$, et qu'on représente par h et k deux constantes, on aura, en intégrant l'équation résultante :

$$r^2 = hp^{n+1} + k,$$

laquelle est l'équation entre r et p de la famille des courbes dont le rayon de courbure satisfait à la condition (3) donnée dans la question.

Cette dernière représente, dans le cas de $n = -3$, les coniques rapportées au centre; $n = 1$ l'épicycloïde rapportée au centre du cercle fixe, et aussi la développante de la circonférence quand on a, en outre, $h = 1$. En supposant dans la même équation $k = 0$, la résultante représente, pour $n = 3$, la parabole rapportée au foyer; $n = 0$, la circonférence rapportée à l'un de ses points; $n = 1$, la spirale logarithmique rapportée au point asymptotique; $n = -3$ l'hyberbole équilatère rapportée au centre; $n = \frac{1}{3}$, la cardioïde rapportée au point de rebroussement; $n = -\frac{1}{3}$, la lemniscate de Bernoulli rapportée au centre; etc.

THÉORÈMES;

PAR M. PAUL SERRET.

1. Soient un polygone inscriptible, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les longueurs de ses côtés; M un point qui se meut sous la condition que ses distances positives $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aux côtés de ce polygone soient liées par la relation

$$(1) \qquad \frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \ldots + \frac{a_n}{p_n}:$$

le point M décrit l'arc du cercle circonscrit au polygone, sous-tendu par le côté a_1.

Si le polygone est régulier, la relation entre les distances se réduit à celle-ci :

$$(1') \qquad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}.$$

2. Une droite se meut dans le plan d'un polygone *régulier*, de manière que les distances de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des sommets de ce polygone à cette droite, soient liées par la relation

$$(2) \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}.$$

La droite mobile a pour enveloppe l'arc du cercle inscrit au polygone, sous-tendu par la polaire du premier sommet.

Si le polygone est circonscriptible sans être régulier, il existe encore un théorème analogue se traduisant par une formule semblable à la formule (1).

3. Soient deux séries de cercles orthogonaux et un quadrilatère convexe ayant pour sommets les traces d'un cercle *variable* de la première série sur deux cercles *fixes* de la seconde : les côtés opposés et les diagonales de ce quadrilatère se coupent suivant deux points fixes.

4. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignent n arcs formant une proportion arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, toutes les racines de l'équation

$$\frac{1}{x - \cos\alpha_1} + \frac{1}{x - \cos\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x - \cos\alpha_n} = 0$$

sont réelles, et $\cos\frac{\pi}{n}$ est l'une de ces racines (conséquence du théorème 2).

5. Soient une spirale logarithmique, une corde mobile vue de l'*origine* sous un angle constant, et le *pôle* de cette corde par rapport à la spirale ou le point de concours des tangentes à la courbe, menées par les extrémités de la corde; l'enveloppe de la corde mobile et la ligne décrite par le pôle sont deux spirales logarithmiques. Le sommet d'un angle constant, circonscrit à une spirale logarithmique, décrit de même une spirale.

6. Un cercle variable passe constamment par le centre d'un cercle donné : l'enveloppe de ce cercle et l'enveloppe de la droite mobile qui réunit ses traces sur le cercle donné sont deux courbes *réciproques*.

L'enveloppe d'une sphère, se mouvant sous une condition analogue, donne lieu à une proposition semblable.

7. Un cercle variable passant constamment par un point fixe O, si l'enveloppe de la droite qui réunit ses

traces sur un cercle fixe, est représentée par l'équation

$$(1) \qquad f(\rho, \omega) = 0,$$

l'équation

$$(2) \qquad f\left(\frac{m}{\rho + n\cos\omega}, \omega\right) = 0,$$

où m et n désignent des constantes, représentera l'enveloppe du cercle variable ; et les deux enveloppes seront simultanément *circulaires*, pour trois positions distinctes du point fixe O par rapport au cercle donné (*).

NOTE SUR UNE FORMULE CONNUE;

PAR M. PAUL SERRET.

1. « Si une ligne plane admet un diamètre rectiligne, les rayons de courbure de cette ligne, aux extrémités d'une corde AA' conjuguée à ce diamètre, sont inversement proportionnels aux cubes des sinus des angles que forment, avec le diamètre, les tangentes menées par les extrémités de la corde. »

Que l'on considère, en effet, en même temps que la corde fixe AA', deux autres cordes BB', CC', conjuguées au diamètre et infiniment voisines de la première. Les triangles ABC, A'B'C' étant équivalents, le rapport $\frac{R}{R_1}$ des rayons des cercles circonscrits à ces triangles est égal au produit des rapports de leurs côtés homologues ; et l'un quelconque de ces derniers rapports a pour limite, quand les points B et C, B' et C' se rapprochent indéfiniment des

(*) M. Serret ne nous ayant pas fait connaître les démonstrations de ces différents théorèmes, nous accepterons celles qui nous seront adressées.

points A et A', le rapport des sinus des angles formés par les tangentes en ces points avec le diamètre.

2. « Si l'on considère une ligne plane quelconque, la tangente en l'un de ses points, et la ligne diamétrale passant par ce point et relative aux cordes parallèles à cette tangente : la tangente trigonométrique de *l'angle d'incidence* de la ligne diamétrale sur la ligne proposée est égale à $\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}$. » (Maclaurin.)

$$\tang i = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}. \tag{1}$$

Supposons d'abord que la ligne diamétrale se réduise à une droite Ox; considérons une corde AA', parallèle à la tangente Oy et infiniment voisine de cette tangente; et soient ρ et ρ' les rayons de courbure de la ligne proposée en A et A'; t et t' les angles des tangentes aux mêmes points avec le diamètre Ox. On aura, par le lemme précédent,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin^3 t'}{\sin^3 t},$$

$$\frac{\rho - \rho'}{\rho'} = \frac{\sin^3 t' - \sin^3 t}{\sin^3 t},$$

$$-\frac{1}{\rho'}\cdot\frac{\Delta\rho}{\Delta s} = \frac{1}{\sin^3 t}\cdot\frac{\Delta \sin^3 t}{\Delta s},$$

$\Delta\rho$ et $\Delta\sin^3 t$ désignent les *différences* du rayon de courbure et du nombre $\sin^3 t$ dans le passage de l'origine à l'extrémité de l'arc $AOA' = \Delta s$. D'ailleurs, l'intervalle Δs étant infiniment petit, les rapports des différences peuvent être remplacés par les rapports des différentielles correspondantes; on peut écrire, en simplifiant,

$$-\frac{1}{\rho'}\cdot\frac{d\rho}{ds} = 3\cot t\,\frac{dt}{ds};$$

et, de là, en passant à la limite,

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{ds} = 3\,\text{tang}\,i\,\frac{1}{\rho},$$

ou

$$(1)\qquad \text{tang}\,i = -\frac{1}{3}\cdot\frac{d\rho}{ds}.$$

La formule (1), ainsi démontrée pour le cas où le diamètre est rectiligne, se trouve établie en même temps pour le cas général. Et cela résulte, d'une manière assez évidente, de ce que l'on peut toujours substituer à une ligne la tangente en l'un de ses points, ou supposer droite cette ligne, quand on a seulement pour objet de déterminer la direction de ses tangentes. Si cependant on ne voulait point se contenter de cette évidence, on pourrait, menant la tangente Ox à la ligne diamétrale en O, associer à l'arc OA de la courbe primitive, situé d'un côté de cette tangente, un second arc auxiliaire OA'_1, situé de l'autre côté, et tel que la nouvelle courbe AOA'_1 possède le diamètre rectiligne Ox. La formule (1) serait applicable à la nouvelle courbe; et le rapport $\frac{d\rho}{ds}$ aurait la même valeur pour celle-ci et pour la proposée. Car on reconnaît aisément que les arcs OA'_1, OA' ont même tangente au point O; que la différence de leurs ordonnées, parallèles à la tangente en O, et terminées à la droite Ox, est du troisième ordre; la différence des ordonnées perpendiculaires à la tangente étant dès lors du quatrième ordre, ce qui entraîne l'égalité des rayons de courbure et du rapport $\frac{d\rho}{ds}$ dans les deux arcs.

QUESTION 616

(voir p. 186).

Soit construit un triangle MNO, *le sommet* N *est fixe ainsi que les directions des côtés* NM *et* NO, *le côté* MO *a une longueur constante; par conséquent il touchera une certaine courbe : le point de contact sur chaque tangente* MO *est aussi éloigné de* M *que la projection orthogonale de* N *est éloignée de* O; *cette courbe nommée hypocycloïde, est fermée et composée de quatre branches correspondant aux quatre angles des directions données* NM, NO. (Böklen.)

Solution de M. F. SIACCI,
Officier d'artillerie (à Turin).

Soit P le point de la courbe correspondant à la tangente MO, et soient x, y ses coordonnées rapportées aux axes NO, NM. On aura

$$\mathrm{PM} = \frac{x \sin \mathrm{N}}{\sin(\alpha - \mathrm{N})}, \quad \mathrm{PO} = \frac{y \sin \mathrm{N}}{\sin \alpha},$$

et par conséquent

$$\frac{x \sin \mathrm{N}}{\sin(\alpha - \mathrm{N})} + \frac{y \sin \mathrm{N}}{\sin \alpha} = a, \tag{1}$$

a étant la longueur constante MO, et α l'angle que cette droite fait avec l'axe des x. Cette équation représente la droite MO dans une de ses positions. Si on la différentie par rapport à α, on aura une autre équation dans laquelle, ainsi que dans la précédente, x, y sont les coordonnées du point P de la courbe.

Or, de l'équation (1), on déduit l'équation

$$y = \frac{a \sin \alpha}{\sin N} - \frac{x \sin \alpha}{\sin(\alpha - N)},$$

laquelle, différentiée par rapport à α et divisée par $d\alpha$, donne

$$\frac{x \sin N}{\sin^2(\alpha - N)} = - \frac{a \cos \alpha}{\sin N};$$

d'où

$$\frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)} = - \frac{a \sin(\alpha - N)}{\sin N} \cdot \cos \alpha,$$

équation qui démontre le théorème, ayant trouvé $MP = \frac{x \sin N}{\sin(\alpha - N)}$, et la projection de ON sur OM étant égale à $- \frac{a \sin(\alpha - N)}{\sin N} \cdot \cos \alpha$.

Il résulte évidemment de cette propriété : 1° que la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle N ; 2° qu'elle rencontre les axes en quatre points également éloignés de l'origine ; 3° que ces points sont des points d'inflexion.

Lorsque $N = 90°$, il devient très-facile d'avoir l'équation de la courbe. En effet, l'équation (1) devient alors

$$- \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = a,$$

qui, différentiée par rapport à α, donne

$$- \frac{x \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0 ;$$

d'où

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = - \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

$$\sin\alpha = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\alpha = \frac{-x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et par conséquent

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

équation d'une hypocycloïde.

NOTE
SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE;

PAR M. JOSEPH SACCHI (DE MILAN).

Si entre les côtés a, b, c, d'un triangle rectiligne, respectivement opposés aux angles α, β, γ, on a la relation $a^n = b^n + c^n$, où n et α sont des constantes, on aura nécessairement et uniquement $n = 2$ et $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (*).

En posant

$$\sin\alpha = h, \quad \alpha + \beta = y,$$

et, en substituant, dans la relation donnée, les valeurs

$$b = \frac{a}{h}\sin\beta, \quad c = \frac{a}{h}\sin y,$$

on obtient

$$h^n = \sin^n\beta + \sin^n y. \tag{1}$$

(*) M. Sacchi a remarqué que la démonstration de cette proposition donnée par M. Umpfenbach (*Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 400) est incomplète.

Prenant la dérivée par rapport à β, on a la relation

$$\sin^{n-1}\beta\cos\beta+\sin^{n-1}y\cos y=0,$$

laquelle, multipliée par $\tang\beta\tang y$, donne

$$\sin^n\beta\tang y+\sin^n y\tang\beta=0;$$

éliminant $\sin^n y$ au moyen de l'équation (1), et ensuite remplaçant $\tang y$, $\tang\beta$, $\tang\alpha$, par leurs valeurs respectives

$$\frac{\tang\beta+\tang\alpha}{1-\tang\beta\tang\alpha},\quad\frac{\sin\beta}{\sqrt{(1-\sin^2\beta)}},\quad\frac{h}{\sqrt{(1-h^2)}},$$

et posant $\sin\beta=X$, on a

$$Xh^n-X^{n-1}=h^{n-1}\sqrt{(1-h^2)(1-X^2)}.$$

De là, en faisant le carré des deux membres, on déduit

$$X^2(X^{2n-4}-2h^nX^{n-2}+h^{2n-2})+h^{2n-2}(h^2-1)=0.$$

Cette équation, devant subsister quel que soit X, fournit les deux suivantes

$$h^2-1=0,\quad X^{2n-4}-2h^nX^{n-2}+h^{2n-2}=0,$$

de la première desquelles on tire $h=1$, ou bien $\alpha=\frac{1}{2}\pi$; et par conséquent la seconde devient

$$(X^{n-2}-1)^2=0,$$

et ne peut être satisfaite, quel que soit X, que par $n=2$.

AIRE DU TRIANGLE RECTILIGNE EN FONCTION DES BISSECTRICES CONJUGUÉES;

PAR M. JOSEPH SACCHI.

Soient ABC un triangle dont les côtés

$$BC = X_1, \quad CA = X_2, \quad AB = X_3; \quad X_1 < X_2 < X_3;$$

D et D' les points auxquels le côté BC et son prolongement sont rencontrés par $AD = b_1$, $AD' = b'_1$, bissectrices conjuguées correspondantes à l'angle $BAC = \alpha_1$ opposé au côté X_1; b_2, b'_2; b_3, b'_3, les deux couples de bissectrices correspondantes aux angles α_2, α_3, opposés aux deux autres côtés X_2, X_3; A l'aire du triangle.

Que l'on conduise DE, D'E', parallèles à AC et qui rencontrent BA et son prolongement en E et E', et que l'on fasse

$$DE = l, \quad D'E' = l'.$$

Les triangles BDE, BD'E', semblables à BAC, donnent

$$l = \frac{X_3 X_2}{X_3 + X_2}, \quad l' = \frac{X_3 X_2}{X_3 - X_2};$$

les triangles ADE, AD'E', isocèles par les propriétés des bissectrices, donnent les équations

$$b_1^2 = 2l^2(1 + \cos\alpha_1), \quad b'^2_1 = 2l'^2(1 - \cos\alpha_1),$$

dont le produit est

$$b_1 b'_1 = 2 l l' \sin\alpha_1.$$

Remplaçant l et l' par leurs valeurs, et observant que

$$X_2 X_3 \sin\alpha_1 = 2A,$$

on a

$$X_3^2 - X_2^2 = X_3 X_2 \frac{4A}{b_1 b'_1}.$$

D'une manière analogue, on obtiendrait

$$X_3^2 - X_1^2 = X_3 X_1 \frac{4A}{b_2 b'_2}, \quad X_2^2 - X_1^2 = X_2 X_1 \frac{4A}{b_3 b'_3}.$$

Or, en posant

$$\frac{X_3}{X_1} = x, \quad \frac{X_2}{X_1} = y, \quad \frac{1}{b_r b'_r} = q_r, \quad 4Aq_r = p_r,$$

les trois dernières équations donnent les suivantes :

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = p_1 xy,$$

$$(2) \qquad x^2 - 1 = p_2 x,$$

$$(3) \qquad y^2 - 1 = p_3 y;$$

de la somme des équations (1) et (3) retranchant l'équation (2), on a

$$y = \frac{p_2 x}{p_1 x + p_3}.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (3) devient

$$(p_1 p_2 p_3 + p_1^2 - p_2^2) x^2 + (p_2 p_3^2 + 2p_1 p_3) x + p_3^2 = 0;$$

additionnant cette dernière équation avec celle qu'on obtient en multipliant par p_3^2 l'équation (2), on a

$$x (p_1 p_2 p_3 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2) + 2p_1 p_3 = 0;$$

éliminant x des deux dernières, on a

$$(p_1 p_2 p_3)^2 = (p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)^2 - 4p_1^2 p_3^2,$$

de laquelle, en remplaçant p_r par sa valeur, et en posant

$$q_1 + q_2 + q_3 = 2s,$$

on tire la formule cherchée

$$q_1 q_2 q_3 A = \sqrt{s(q_1 - s)(q_2 - s)(q_3 - s)}.$$

Si l'on pose

$$2 \sin \frac{\alpha_r}{2} = h_r, \quad \frac{2}{b_r h_r} = k_r,$$

et si l'on fait la somme des aires des deux triangles dans lesquels le triangle donné est partagé par chacune des bissectrices, on obtient

$$X_2 + X_3 = 2 A k_1, \quad X_1 + X_3 = 2 A k_2, \quad X_1 + X_2 = 2 A k_3,$$

desquelles on tire les valeurs de x_r qui transforment la formule connue

$$16 A^2 = h_1 h_2 h_3 X_1 X_2 X_3 (X_1 + X_2 + X_3),$$

dans la suivante

$$\frac{1}{A} = \sqrt{h_1 h_2 h_3} \sqrt{t(t - k_1)(t - k_2)(t - k_3)},$$

où

$$2t = k_1 + k_2 + k_3,$$

qui donne l'aire d'un triangle en fonction des bissectrices intérieures et des sinus des demi-angles du même triangle.

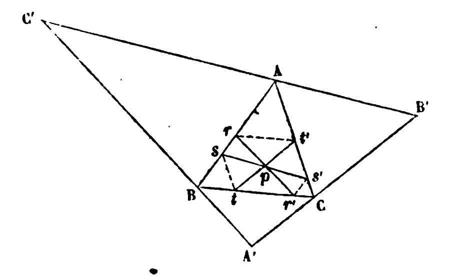
QUESTION 270

(voir tome XII, page 99).

Soient ABC *un triangle et un point p dans le plan du triangle; par le point p menons trois droites, de sorte que p soit le milieu de la partie rr′ interceptée entre les côtés a, b, de la partie ss′ interceptée entre b et c et de la partie tt′ interceptée entre c et a; les six points r, r′, s, s′, t, t′ sont sur une même conique* M. *Menant par le sommet* A *une droite α formant avec les droites b, c, p*A *un faisceau harmonique, et d'une manière analogue une droite* β *en* B; *et* γ *en* C : *il existe une conique* M′ *qui touche les trois droites α, β, γ, en* A, B, C, *et la conique* M′ *est homothétique à la conique* M. (STEINER.)

SOLUTION DE M. VINCENZO JANNI (DE NAPLES).

Soient AB′, CA′, BC′ respectivement les quatrièmes harmoniques de Ap, Cp, Bp par rapport aux côtés



(AB, AC), (CA, CB), (BC, BA), et par conséquent parallèles aux droites ss', tt', rr'. Si nous menons les droites rt', $s'r'$, ts, nous aurons un hexagone dont les côtés opposés seront parallèles, d'où l'on voit que les six

points r, r', s, s', t, t' se trouvent sur une conique. Les triangles AB′C, CA′B, BC′A sont respectivement semblables aux triangles $t'ps'$, $r'pt$, spr, et par conséquent on a

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{ps'}{pt'},\quad \frac{CA'}{A'B}=\frac{pt}{pr'},\quad \frac{BC'}{C'A}=\frac{pr}{ps},$$

d'où l'on tire

$$\frac{AB'.CA'.BC'}{B'C.A'B.C'A}=1,$$

ce qui est la condition pour qu'une conique puisse toucher les côtés du triangle A′B′C′ aux points A, B, C. Appelant S, T, R les trois diamètres de cette dernière conique respectivement parallèles aux diamètres de la première ss', tt', rr', et aux côtés du triangle A′B′C′, on aura

$$S:T=AB':B'C=ss':tt',$$

$$T:R=A'C:A'B=tt':rr',$$

d'où l'on tire

$$S:T:R=ss':tt':rr';$$

ces deux coniques ayant trois diamètres parallèles en proportion, on voit qu'elles sont homothétiques.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De M. MOGNI,
Professeur de mathématiques à Tortone.

Dans la solution de la question 532, p. 286 du t. XX, le corollaire que l'on déduit est contradictoire au lemme qui le précède.

Avec un peu d'attention, on voit que le segment con-

sidéré sera plus grand que $\frac{4}{3}a$, qui en est évidemment une limite inférieure.

Ce qui d'ailleurs est conforme à la citation de Huyghens, qui se trouve en tête de l'article.

On verra, d'après cela, que les démonstrations données p. 273 et suiv., où l'on prend $\frac{4}{3}a$ comme une limite supérieure du segment, ne pourraient subsister.

DÉMONSTRATION DE LA RELATION INDIQUÉE PAR M. MANNHEIM

(voir page 123);

PAR M. VIANT,
Professeur de mathématiques spéciales à l'École militaire de la Flèche.

J'écrirai la relation qui définit la courbe (M) de la manière suivante :

$$\Sigma \frac{\lambda}{r} = \frac{\mu}{R_1}. \tag{1}$$

Je prends les dérivées des deux membres deux fois de suite, ce qui me donne

$$\Sigma \frac{\lambda r'}{r^2} = \frac{\mu R'_1}{R_1^2}, \tag{2}$$

et, en ôtant un facteur après la seconde dérivation,

$$\Sigma \frac{\lambda (rr'' - 2r'^2)}{r^3} = \frac{\mu (R_1 R''_1 - 2R'^2_1)}{R_1^3}. \tag{3}$$

Je multiplie les termes de l'égalité (1) respectivement

par

$$\frac{r^2}{r^2},\ \frac{r_1^2}{r_1^2},\ldots,\ \frac{R_1^2}{R_1^2},$$

et j'en retranche l'égalité (3); ce qui conduit à

$$(4)\qquad \Sigma\,\frac{\lambda(r^2+2r'^2-rr'')}{r^3}=\frac{\mu(R_1^2+2R_1'^2-R_1R_1'')}{R_1^3}.$$

On sait que l'expression du rayon de courbure est

$$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''},\quad \text{ou}\quad \rho=\frac{r^3\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''};$$

ou encore

$$\rho=\frac{r^3}{\cos^3\alpha\,(r^2+2r'^2-rr'')},$$

en se rappelant que

$$\frac{r}{r'}=\operatorname{tang}V=\cot\alpha,$$

V étant l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur, et α celui qu'on a défini dans l'énoncé.

De la dernière formule de ρ on tire

$$\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^3}=\frac{1}{\rho\cos^3\alpha},$$

et en substituant dans l'égalité (4), on a la relation

$$\Sigma\,\frac{\lambda}{\rho\cos^3\alpha}=\frac{\mu}{R\cos^3\varphi}.$$

C. Q. F. D.

NOTE SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. S. MOCH,
Professeur de mathématiques à l'École militaire de la Flèche.

Remarque. — En cherchant la différence entre les fractions $\frac{C}{x-a}$ et $\frac{C}{x-b}$, on trouve

$$\frac{C}{x-a} - \frac{C}{x-b} = \frac{C(a-b)}{(x-a)(x-b)}$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{C}{(x-a)(x-b)} = \frac{C:(a-b)}{x-a} - \frac{C:(a-b)}{(x-b)}.$$

La formule (1) donne le moyen de décomposer immédiatement une fraction de la forme $\frac{C}{(x-a)(x-b)}$ en deux fractions simples de la forme $\frac{N}{x-a}$ et $-\frac{N}{x-b}$.

En remarquant que $(a-b)$ est la différence entre les facteurs $(x-b)$ et $(x-a)$, la loi de décomposition apparaît à la simple inspection de la formule (1). En appliquant cette loi aux fractions $\frac{13}{(x-6)(x-2)}$, $\frac{3}{x(x-5)}$, $\frac{17}{(x+4)(x-3)}$, on écrira immédiatement

$$\frac{13}{(x-6)(x-2)} = \frac{13}{4(x-6)} - \frac{13}{4(x-2)};$$

de même

$$\frac{3}{x(x-5)} = \frac{3}{5(x-5)} - \frac{3}{5.x},$$

et encore

$$\frac{17}{(x+4)(x-3)}=\frac{17}{7(x-3)}-\frac{17}{7(x+4)}.$$

Cas des racines inégales.

Soit la fraction rationnelle $\frac{fx}{Fx}$, et soit

$$Fx=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

on aura, en effectuant la division de fx par $x-a$,

$$\frac{fx}{x-a}=f_1x+\frac{A}{x-a}.$$

Divisons les deux membres par $(x-b)$,

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)}=f_2x+\frac{B}{x-b}+\frac{A}{(x-a)(x-b)};$$

mais, en vertu de la formule (1),

$$\frac{A}{(x-a)(x-b)}=\frac{A'}{x-a}-\frac{A'}{x-b},$$

il viendra donc en substituant

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)}=f_2x+\frac{B}{x-b}+\frac{A'}{x-a}-\frac{A'}{x-b},$$

et après réduction

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)}=f_2x+\frac{A'}{x-a}+\frac{B'}{x-b}.$$

Divisant par $x-c$, il viendra

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)}=f_3x+\frac{C}{x-c}+\frac{A'}{(x-a)(x-c)}$$
$$+\frac{B'}{(x-b)(x-c)};$$

mais, en vertu de la formule (1),

$$\frac{A'}{(x-a)(x-c)}=\frac{A''}{x-a}-\frac{A''}{x-c}$$

$$\frac{B'}{(x-b)(x-c)}=\frac{B''}{x-b}-\frac{B''}{x-c};$$

remplaçant, il viendra

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)}=f_3x+\frac{C}{x-c}+\frac{A''}{x-a}-\frac{A''}{x-c}+\frac{B''}{x-b}-\frac{B''}{x-c};$$

et après réduction

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)}=f_3x+\frac{A''}{x-a}+\frac{B''}{x-b}+\frac{C''}{x-c}.$$

On trouvera de même

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}=f_4x+\frac{A'''}{x-a}+\frac{B'''}{x-b}+\frac{C'''}{x-c}+\frac{D'''}{x-d};$$

et en continuant

$$\frac{fx}{(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-k)}=f_mx+\frac{A_m}{(x-a)}+\frac{B_m}{x-b}+\frac{C_m}{x-c}+\dots+\frac{K_m}{x-k}.$$

QUESTION 612

(voir p. 128).

On donne sur le même plan deux circonférences O, O′ *et un point fixe* P; *on décrit des circonférences passant par* P *et tangentes à* O, *l'on prend les axes radicaux de ces circonférences et de* O′; *on demande l'enveloppe de ces droites. Déterminer directement le point de contact de chaque axe radical avec cette enveloppe.*

Solution de MM. Frédéric DELAFOND et G. MAHUET,
Elèves du lycée de Lyon.

Le lieu des centres des circonférences passant par P et tangentes à O est une hyperbole (*) dont les foyers sont les points P et O, et dont l'axe réel est égal au rayon $2a$ du cercle O. Soit pris pour origine des coordonnées le point M, milieu de OP. L'axe des x étant dirigé suivant MO, et l'axe des y lui étant perpendiculaire, l'hyperbole aura pour équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

si

$$\text{OP} = 2c, \quad \text{et} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Soient α, β, les coordonnées d'un point O″ de cette hyperbole, l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left(\frac{c}{a}\alpha + a\right)^2$$

(*) Ce serait une ellipse si le point P était dans l'intérieur du cercle O, et une droite si ce point était sur la circonférence.

représentera le cercle ayant O″ pour centre, tangent à O et passant par P.

L'équation du cercle O′ étant

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0,$$

l'axe radical des circonférences O′, O″ aura pour équation

$$(1)\quad px + qy + r + 2\alpha x + 2\beta y + \left(\frac{c\alpha}{a} + a\right)^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

Je prends la dérivée de cette équation en considérant β comme une fonction de α déterminée par la relation

$$(2)\quad a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = -a^2b^2.$$

Il en résulte

$$x + \beta' y + \frac{c}{a}\left(\frac{c\alpha}{a} + a\right) - \alpha - \beta\beta' = 0$$

et

$$\beta' = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta};$$

par suite

$$(3)\quad y = -\frac{a^2\beta}{b^2\alpha}(x + c).$$

Cette dernière équation est celle d'une parallèle à la normale à l'hyperbole au point O″, menée par le point P. Donc, pour déterminer le point de contact de l'axe radical avec l'enveloppe, il suffira de mener par le point P une parallèle à la bissectrice de l'angle extérieur au triangle OPO″ et de prendre sa rencontre avec l'axe radical des circonférences O′, O″.

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (3). Les équations (2) et (3) donnent

$$\alpha = \pm \frac{a^2(x + c)}{\sqrt{a^2(x + c)^2 - b^2y^2}}, \quad \beta = \mp \frac{b^2 y}{\sqrt{a^2(x + c)^2 - b^2y^2}}.$$

Substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(4)\qquad px + qy + r + c^2 \pm 2\sqrt{a^2(x+c)^2 - b^2y^2} = 0\ (*);$$

d'où

$$[a(x+c)+by][a(x+c)-by] = \frac{1}{4}(px+qy+r+c^2)^2,$$

équation qui représente une conique tangente aux deux droites

$$(5)\qquad a(x+c)+by=0,$$

$$(6)\qquad a(x+c)-by=0,$$

la corde des contacts ayant pour équation

$$(7)\qquad px+qy+r+c^2=0.$$

Les droites (5) et (6) passent par le point donné P et sont perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

La corde des contacts (7) est perpendiculaire à la droite qui joint l'origine au centre de la circonférence O'.

Note. — M. Kessler a résolu la même question au moyen d'un calcul peu différent de celui de MM. Delafond et Mahuet. Toutefois M. Kessler établit d'une manière générale l'équation du lieu du point O'', équation qui est

$$p^2 - r^2 - 2p\alpha + 2r\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 0,$$

en nommant p la distance OP, et r le rayon de la circonférence O, et qui représente une hyperbole ou une ellipse

---

(*) Si le point P était intérieur au cercle O, il faudrait remplacer dans l'équation (4) b^2 par $-b^2$, et si ce point était sur la circonférence O, b serait nul. (*Note du Rédacteur.*)

ayant pour directrices les droites

$$\pm(p^2 - r^2 - 2p\alpha) = 0,$$

et pour foyers les points O et P, suivant que $p^2 - r^2$ est positif ou négatif. La même équation appartient à une droite lorsqu'on a

$$p^2 - r^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0.$$

QUESTION 624

(voir p. 172).

Un angle trièdre trirectangle mobile a son sommet en un point fixe pris sur une surface quelconque du second ordre, le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passe constamment par un même point de la normale issue du sommet fixe de l'angle trièdre. On demande le lieu de ce point, lorsque le sommet du trièdre parcourt la surface donnée.

Solution de M. Abraham SCHNÉE,
Elève du lycée Charlemagne,

Et de MM. G. BARTET et H. LEBASTEUR,
Elèves du lycée Napoléon (classe de M. Vaquant).

---

1. Je prends pour origine le point fixe, pour plan des xy le plan tangent en ce point, et pour axes des z la normale à l'origine. L'équation de la surface est alors

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz = 2C''z.$$

Soit

$$(2) \qquad lx + my + nz = v$$

l'équation du plan déterminé par les intersections des trois arêtes du trièdre et de la surface, je dis que l'équation

$$(3)\quad p(Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B''xz)=2C''z(lx+my+nz)$$

représente un cône ayant pour sommet l'origine et pour base l'intersection de la surface et du plan.

Car, l'équation (3) étant homogène, représente un cône dont le sommet est à l'origine, et de plus ce cône passe par l'intersection des surfaces (1) et (2), puisque l'équation (3) est vérifiée par les solutions communes aux équations (1) et (2).

Ce cône a trois génératrices rectangulaires, donc

$$(4)\qquad p(A+A'+A'')-2C''n=0\,(*)$$

ou

$$\frac{p}{n}=\frac{2C''}{A+A'+A''}.$$

D'ailleurs, en faisant $x=0$, $y=0$, dans l'équation du plan, on a

$$z=\frac{p}{n}.$$

Par conséquent, la valeur de z est constante et égale à $\frac{2C''}{A+A'+A''}$, ce qui démontre le théorème.

2. Il reste à trouver le lieu du point qui vient d'être déterminé, quand le sommet du trièdre parcourt la surface donnée. En faisant tourner le trièdre autour de son sommet, le point dont on cherche le lieu géométrique reste

(*) Quand les coordonnées sont rectangulaires, il faut pour que le cône $Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0$ ait trois génératrices rectangulaires, que $A+A'+A''=0$. C'est ce qu'on démontre très-simplement, en prenant pour axes de coordonnées les trois génératrices.

fixe; on peut alors admettre, dans la recherche de ce lieu, que les trois arêtes du trièdre sont constamment parallèles à trois droites rectangulaires données.

En prenant pour exemple l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, on admettra que les arêtes du trièdre soient constamment parallèles aux axes de la surface.

Soient x', y', z' les coordonnées du sommet, on a

$$(1) \qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

Les coordonnées des points où les trois arêtes percent la surface sont

$$(-x',\ y',\ z'),\quad (x',\ -y',\ z'),\quad (x',\ y',\ -z').$$

Le plan passant par ces trois points a pour équation

$$(2) \qquad \frac{x}{x'}+\frac{y}{y'}+\frac{z}{z'}=1.$$

Les équations de la normale au point (x', y', z') sont

$$(3) \qquad a^2\left(\frac{x-x'}{x'}\right)=b^2\left(\frac{y-y'}{y'}\right)=c^2\left(\frac{z-z'}{z'}\right).$$

Entre les équations (1), (2) et (3) éliminons x', y', z', nous aurons le lieu cherché.

Des équations (2) et (3) on tire

$$x'=x\left(\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right),$$

$$y'=y\left(\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\right),\qquad z'=z\left(\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}\right);$$

et remplaçant dans l'équation (1) on a

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\right)^2+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\right)^2$$

$$+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\right)^2,$$

équation d'un ellipsoïde concentrique au premier, et dont les axes ont les mêmes directions.

Les calculs se feraient d'une manière semblable pour une surface quelconque du second ordre.

Note. — MM. Frédéric Delafond et G. Mahuet, élèves du lycée de Lyon, L. P., élève du lycée Saint-Louis, sont parvenus aux mêmes résultats par une analyse peu différente de celle qui précède.

La question 624 a été aussi résolue par MM. G. B. (de Florence) et H. de la Phidelne.

QUESTION 620.

On donne une courbe du troisième ordre ayant un point double et en ce point des tangentes perpendiculaires entre elles; les hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans cette courbe et dont les sommets de l'angle droit sont toujours au point double, passent par un même point de la courbe.

Quatre démonstrations différentes de cette proposition nous ont été adressées par MM. L. P., élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), Richard, élève de la

classe de spéciales de Douai, G. Halphen, élève du lycée Saint-Louis, Schnée, élève du lycée Charlemagne; nous allons donner celle de M. L. P., qui est très-simple.

J'opère en coordonnées polaires; l'origine est le point double, et l'une des tangentes l'axe polaire. En exprimant les conditions de l'énoncé, l'équation générale de la courbe est

$$(1) \quad \rho = \frac{d \sin\omega \cos\omega}{a \sin^3\omega + b \sin^2\omega \cos\omega + b' \sin\omega \cos^2\omega + c \cos^3\omega} \; (*).$$

Je cherche l'intersection de cette courbe avec la droite quelconque

$$(2) \qquad \rho = \frac{1}{\beta \sin\omega + \beta' \cos\omega}.$$

Soient ω_1, ω_2, ω_3 les valeurs de ω correspondantes aux trois points d'intersection, elles seront données par leurs tangentes au moyen de l'équation

$$(3) \quad a \operatorname{tang}^3\omega + (b - d\beta) \operatorname{tang}^2\omega + (b' - d\beta') \operatorname{tang}\omega + c = 0,$$

obtenue en égalant les valeurs de ρ des équations (1) et (2), et divisant ensuite par $\cos^3\omega$.

Or, par hypothèse,

$$\operatorname{tang}\omega_2 \operatorname{tang}\omega_3 = -1,$$

donc

$$\operatorname{tang}\omega_1 = \frac{c}{a}.$$

(*) On voit facilement qu'en prenant pour axes de coordonnées rectilignes les deux tangentes rectangulaires au point double, l'équation de la courbe est de la forme

$$ax^3 + bxy^2 + b'x^2y + cx^3 = dxy;$$

la substitution de $\rho \sin\omega$, $\rho \cos\omega$ à y, x donne ensuite l'équation (1).

(*Note du Rédacteur.*)

En remplaçant ω_1 par sa valeur dans l'équation (1), on obtiendra évidemment pour p_1 une valeur constante. Le théorème est donc vrai.

COMPOSITIONS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1862).

Composition mathématique.

Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$(1)\quad x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz-2ax-2by-2cz=0,$$

où a, b, c, sont des nombres positifs connus, premièrement lorsque p et q varient de toutes les manières possibles, secondement lorsque p et q varient de manière à remplir la condition nécessaire pour que l'équation (1) représente un cône. On indiquera ensuite la partie du lieu qui répond à des hyperboloïdes à une nappe et celle qui répond à des hyperboloïdes à deux nappes.

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle sphérique, on donne les côtés :

$$a = 40^\circ\ 30'\ 50''$$
$$b = 42^\circ\ 25'\ 25''$$
$$\text{et l'angle } C = 45^\circ\ 32'\ 40''.$$

Calculer : 1° le côté c ; 2° l'angle A ; 3° l'angle B ; 4° (si le temps le permet) calculer directement l'excès sphérique.

Nota. — Les candidats devront faire les opérations

successives dans l'ordre indiqué ci-dessus et dans la limite du temps dont ils disposent. Ils effectueront immédiatement les calculs sur les feuilles à tête imprimée qui leur seront distribuées et sans se servir de brouillon. Toute composition où une partie de ces calculs serait omise sera annulée.

Géométrie descriptive.

On donne un cône droit de révolution et une sphère dont le centre est situé sur une génératrice du cône ayant pour projection une droite inclinée à 45° sur la ligne de terre.

Il s'agit :

1° De déterminer l'intersection des deux surfaces par ses deux projections sur deux plans coordonnés ;

2° De développer la surface conique et de tracer sur le développement l'intersection développée des deux surfaces ;

3° De construire une tangente à la courbe développée.

Données.

Diamètre de la base du cône.........	12	centimètres.
Hauteur du sommet au-dessus du plan horizontal........................	14	»
Diamètre de la sphère..............	10	»
Hauteur du centre au-dessus du plan horizontal.......................	6	»

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis à l'encre de Chine d'une surface cylindrique de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise ; il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modelé de cette surface cylindrique pourrait être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projections horizontale et verticale des lignes inclinées à 45° sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

Composition française.

MORT DE JEANNE D'ARC.

Une bergère a sauvé la France.... Sortie de son hameau... elle a ranimé le courage de Charles VII, fait lever le siége d'Orléans et conduit le roi à Rheims.... Sa mission terminée, elle est tombée aux mains des ennemis, elle va mourir. Un bûcher s'élève sur la grande place de Rouen; il est entouré de soldats anglais; derrière eux, la multitude, contenue par la terreur, étouffe des larmes.... En face du bûcher, d'infâmes juges siégent sur des gradins... l'héroïne s'avance, calme et résignée.... montée sur le bûcher, elle éprouve un moment de faiblesse;... mais bientôt, ranimée par la prière,... elle meurt en prononçant le nom de Jésus et en pardonnant à ses bourreaux.

Décrire en détail toute cette scène.

NOTA. — Le défaut d'espace nous force à renvoyer au prochain numéro une lettre que nous recevons de M. Dieu au sujet des remarques de M. Vieille sur un article inséré dans le numéro de mai.

MÉMOIRE SUR LES TÉTRAÈDRES.

Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données

(voir p. 267);

PAR M. PAINVIN.

Présenté à l'Académie en janvier 1862.

16. L'équation (10) peut s'écrire :

$$(11)\left\{\begin{array}{l}\theta[(\theta+f_1)^2(\theta+f_2)^2+(\theta+f_1)^2(\theta+f_3)^2+(\theta+f_2)^2(\theta+f_3)^2]\\ -(\theta+f_1)(\theta+f_2)(\theta+f_3)[3\theta^2+2(c-f)\theta+c^2]=0,\end{array}\right.$$

ou, en développant les quantités entre parenthèses,

$$(12)\left\{\begin{array}{l}\theta\left\{\begin{array}{l}3\theta^4+4(f_1+f_2+f_3)\theta^3+2(f_1+f_2+f_3)^2\theta^2\\ +2[(f_1+f_2+f_3)(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3)-3f_1f_2f_3]\theta\\ +f_1^2f_2^2+f_1^2f_3^2+f_2^2f_3^2\end{array}\right\}\\ -[\theta^3+(f_1+f_2+f_3)\theta^2+(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3)\theta+f_1f_2f_3]\\ \times[3\theta^2+2(c-f)\theta+c^2]\end{array}\right\}=0.$$

On voit d'abord que cette équation se réduit au quatrième degré.

On peut supposer, comme je l'ai déjà dit, que l'origine choisie est au sommet opposé à la plus petite face, et admettre les inégalités

$$(13)\qquad f<f_1<f_2<f_3.$$

Par suite de la définition de θ (relations 6), les racines positives de l'équation (11) peuvent seules convenir à la question; cherchons donc le nombre des racines positives de cette équation.

17. Rappelons la définition de la quantité c

$$2c = f_1 + f_2 + f_3 - f.$$

On trouve immédiatement que le coefficient de θ^4 et le terme indépendant sont respectivement $3f$ et $-c^2 f_1 f_2 f_3$; or les quantités f, f_1, f_2, f_3, c sont essentiellement positives; donc l'équation (11) admet au moins une racine réelle positive.

Cette équation étant écrite sous la forme

$$(14)\qquad 3f\theta^4 + P_1\theta^3 - P_2\theta^2 - P_3\theta - c^2 f_1 f_2 f_3 = 0,$$

on trouve les valeurs suivantes pour les coefficients P_1, P_2, P_3 :

$$(15)\left\{\begin{aligned}
4P_3 &= \left\{\begin{aligned}
&f_1 f_2[(f_1 - f_2)^2 + f(f - f_3)]\\
&+ f_1 f_3[(f_1 - f_3)^2 + f(f - f_2)]\\
&+ f_2 f_3[(f_2 - f_3)^2 + f(f - f_1)]\\
&+ 2(f_1 + f_2 + f_3)[3f_1 f_2 f_3 - f(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)]\\
&+ 3f_1 f_2 f_3[f_1 + f_2 + f_3 - 3f]
\end{aligned}\right\},\\
4P_2 &= \left\{\begin{aligned}
&(f_1 + f_2 + f_3)\left[\begin{aligned}&f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2\\ &-2(ff_1 + ff_2 + ff_3 + f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)\end{aligned}\right]\\
&+ 12[f_1 f_2 f_3 - f(f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)]
\end{aligned}\right.\\
4P_1 &= \left\{\begin{aligned}
&3\left[\begin{aligned}&f^2 + f_1^2 + f_2^2 + f_3^2\\ &-2(ff_1 + ff_2 + ff_3 + f_1 f_2 + f_1 f_3 + f_2 f_3)\end{aligned}\right]\\
&+ 4[5f(f_1 + f_2 + f_3) - f^2]
\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

18. Je dis d'abord que P_3 est positif; il suffit, pour s'en convaincre, de poser

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}
f_1 &= f + \varphi_1,\\
f_2 &= f + \varphi_2,\\
f_3 &= f + \varphi_3,
\end{aligned}\right.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, sont des quantités positives, puisque f est la plus petite des faces; on trouve alors que $4P_3$ prend la

forme :

$$(17)\quad 4P_3=\left\{\begin{array}{l} 8(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)f^3+\left[\begin{array}{l}7(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)\\ +18(\varphi_2\varphi_1+\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_3)\end{array}\right]f^2\\ +\left[2(\varphi_1^3+\varphi_2^3+\varphi_3^3)+6\left(\begin{array}{l}\varphi_1^2\varphi_2+\varphi_1^2\varphi_3+\varphi_2^2\varphi_1\\ +\varphi_2^2\varphi_3+36\varphi_1\varphi_2\varphi_3\\ +\varphi_3^2\varphi_1+\varphi_3^2\varphi_2\end{array}\right)\right]f\\ +\varphi_1\varphi_2(\varphi_1-\varphi_2)^2+\varphi_1\varphi_3(\varphi_1-\varphi_3)^2\\ +\varphi_2\varphi_3(\varphi_2-\varphi_3)^2+9(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \end{array}\right\},$$

quantité évidemment positive.

19. Maintenant multiplions la valeur de $4P_2$ par 4, celle de $4P_1$ par $(f_1+f_2+f_3)$, et ajoutons; on trouve

$$(18)\quad 16P_2+4(f_1+f_2+f_3)P_1$$

$$=\left\{\begin{array}{l}(f_1+f_2+f_3)\left[\begin{array}{l}3f^2+6f(f_1+f_2+f_3)\\ +7(f_1^2+f_2^2+f_3^2)\\ -14(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3)\end{array}\right]\\ +48[3f_1f_2f_3-f(f_1f_2+f_1f_3+f_2f_3)]\end{array}\right\}.$$

Si l'on fait usage des relations (16), le second membre de l'égalité (18) se réduit à

$$\left\{\begin{array}{l}24(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)f^2\\ +[13(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)+38(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_3)]f\\ +\left\{\begin{array}{l}7(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\\ \times[\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2-2(\varphi_1\varphi_2+\varphi_1\varphi_3+\varphi_2\varphi_3)]+144\varphi_1\varphi_2\varphi_3\end{array}\right\}\end{array}\right\};$$

les deux premiers termes sont évidemment positifs; nous allons vérifier qu'il en est de même pour la quantité qui occupe la seconde ligne.

D'après les inégalités admises (13), $\varphi_3>\varphi_2>\varphi_1$, on peut donc poser

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_2=\varphi_1+\lambda,\\ \varphi_3=\varphi_1+\mu;\end{array}\right.$$

la quantité en question se présente alors sous la forme

$$102\,\varphi_1^3 + 95(\lambda+\mu)\,\varphi_1^2 + 88\,\lambda\mu\varphi_1 + 7(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)^2;$$

quantité visiblement positive.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion suivante :

$$(19) \qquad 4\,P_2 + (f_1+f_2+f_3)\,P_1 = \text{quantité positive.}$$

Or si P_1 est une quantité positive, l'équation (14), quel que soit le signe de P_2, ne possède qu'une variation ; si P_1 est négatif, P_2 devra nécessairement être positif en vertu de l'égalité précédente, et l'équation (14) ne possède encore qu'une variation.

Donc *l'équation* (11) *a nécessairement une racine réelle positive et n'en a qu'une.*

Ainsi le volume du tétraèdre n'est susceptible que d'une seule valeur ou maximum ou minimum.

20. Mais à la racine réelle de l'équation (11) correspond-il toujours un tétraèdre réel ? et, dans le cas où il est réel, ce volume est-il un maximum ou un minimum ?

Pour répondre à ces questions, étudions les valeurs des dièdres correspondant à l'unique racine réelle positive de l'équation (11) ; ces valeurs sont données par les équations (8).

Je remarque d'abord que

$$r_1^2 > \sqrt{\theta}, \quad r_2^2 > \sqrt{\theta};$$

car, pour que la première inégalité soit vraie, il faut que

$$r_1^4 > \theta, \quad \text{ou} \quad \frac{(\theta+f_2)(\theta+f_3)}{\theta+f_1} > \theta$$

ou

$$\theta(f_2+f_3-f_1) + f_2 f_3 > 0,$$

ce qui est exact d'après les inégalités (13) ; donc *les*

cosinus $\cos(A_2 A_3)$, $\cos(A_1 A_3)$ *sont négatifs; et, par suite, les dièdres correspondants sont aigus* (7).

21. Constatons maintenant que ces dièdres sont réels ; il faut et il suffit, pour cela, que la valeur absolue des cosinus soit inférieure à l'unité; on doit donc avoir

$$\frac{\sqrt{\theta}(r_1^2 - \sqrt{\theta})}{\sqrt{f_2 f_3}} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\theta}(r_2^2 - \sqrt{\theta})}{\sqrt{f_1 f_3}} < 1\,;$$

ces deux conditions, en ayant égard aux valeurs (7), se réduisent à la forme suivante :

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^2(\sqrt{f_3} - \sqrt{f_2} - \sqrt{f_1})(\sqrt{f_3} - \sqrt{f_2} + \sqrt{f_1}) \\ \quad - 2 f_1 \sqrt{f_2 f_3}\,.\,\theta - f_1 f_2 f_3 < 0\,; \\ \theta^2(\sqrt{f_3} - \sqrt{f_2} - \sqrt{f_1})(\sqrt{f_3} + \sqrt{f_2} - \sqrt{f_1}) \\ \quad - 2 f_2 \sqrt{f_1 f_3}\,.\,\theta - f_1 f_2 f_3 < 0\,; \end{array} \right.$$

or ces inégalités sont vérifiées tant que

$$\sqrt{f_3} < \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}.$$

22. Supposons alors

$$(21)\qquad \sqrt{f_3} > \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}\,;$$

les deux racines des équations, obtenues en égalant à zéro les premiers membres des inégalités (20), sont de signes contraires ; la racine positive a pour les deux la même valeur, et cette valeur commune est

$$(22)\qquad \theta_1 = \frac{\sqrt{f_1 f_2 f_3}}{\sqrt{f_3} - \sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}\,;$$

il faut donc, pour que ces inégalités soient vérifiées, que la racine θ de l'équation (11) soit inférieure à la racine

commune θ_1, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$(23) \qquad \theta < \theta_1.$$

Observons d'abord que les grandeurs des quantités f, f_1, f_2, f_3, ne sont pas complétement arbitraires; car la troisième des égalités (17, § II), nous donne

$$(24) \qquad \sqrt{f_3} < \sqrt{f} + \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2},$$

relation d'ailleurs évidente *à priori*.

Posons donc

$$(25) \qquad \sqrt{f_3} - \sqrt{f_1} - \sqrt{f_2} = \mathrm{K},$$

K est une quantité positive d'après l'hypothèse (21), et, en outre, inférieure ou au plus égale à $\sqrt{f}$, d'après l'inégalité (24).

Nous allons substituer, dans le premier membre de l'équation (11), la valeur de θ_1, et constater que le résultat de cette substitution est *positif*, ce qui démontrera l'inégalité (23).

23. Nous dirigerons comme il suit le calcul de cette vérification :

$$(26) \qquad \begin{cases} \sqrt{f_3} = \mathrm{K} + \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} \quad \text{d'après (25)} \\ \text{et} \quad \theta_1 = \dfrac{\sqrt{f_1 f_2 f_3}}{\mathrm{K}}, \end{cases}$$

$$(27) \qquad \begin{cases} \theta_1 + f_1 = \dfrac{\sqrt{f_1}\,(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2})\,(\mathrm{K} + \sqrt{f_2})}{\mathrm{K}}, \\ \theta_1 + f_2 = \dfrac{\sqrt{f_2}\,(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2})\,(\mathrm{K} + \sqrt{f_1})}{\mathrm{K}}, \\ \theta_1 + f_3 = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\mathrm{K}}\,(\mathrm{K} + \sqrt{f_1})\,(\mathrm{K} + \sqrt{f_2}), \end{cases}$$

d'où

$$(\theta_1+f_1)(\theta_1+f_2)=\frac{\sqrt{f_1f_2}\,(\sqrt{f_1}+\sqrt{f_2})^2}{K\sqrt{f_3}}(\theta_1+f_3).$$

Substituons ces valeurs dans le premier membre de l'équation (11), supprimons le facteur positif commun qui se trouve en évidence, et désignons par Θ_1 le résultat ainsi obtenu; on trouve, après avoir posé

$$(28)\qquad \sqrt{f_1}+\sqrt{f_2}=A,\quad \sqrt{f_1f_2}=B,$$

$$\Theta_1=(f-K^2)[K^3+4AK^2+4(A^2+2B)K+12AB]$$
$$-fK(f-K^2),$$

expression qu'on peut écrire ainsi :

$$\Theta_1=(f-K^2)[K^3+4AK^2+(4A^2+8B-f)K+12AB].$$

Or K est une quantité positive et inférieure ou au plus égale à $\sqrt{f}$; de plus la quantité $(4A^2+8B)$ est évidemment supérieure à f; donc Θ_1 est *positif*. L'inégalité (23) est donc vérifiée; par conséquent *les dièdres* $\widehat{A_2A_3}$, $\widehat{A_1A_3}$, *correspondant à la racine* θ *sont toujours réels;* ces deux dièdres sont adjacents à la face OM_1M_2.

24. Ainsi, il est démontré que les dièdres OM_1, OM_2, sont réels; les arêtes r_1, r_2, r_3, sont visiblement réelles; on constate aisément que les angles $\widehat{r_1r_2}$, $\widehat{r_1r_3}$, $\widehat{r_2r_3}$, sont aussi réels. Donc on a dans le tétraèdre $OM_1M_2M_3$ trois faces réelles OM_1M_2, OM_1M_3, OM_2M_3; et deux dièdres adjacents à l'une d'elles et correspondant au sommet O ; par suite *le tétraèdre correspondant à la racine positive* θ *est réel.*

25. J'ajouterai maintenant que le tétraèdre acquiert, pour cette valeur θ, un volume maximum.

Le groupe (III) du § II nous donne en effet

$$(29)\quad \lambda^4 = f_1 f_2 f_3 \begin{vmatrix} 1 & \cos(A_1 A_2) & \cos(A_1 A_3) \\ \cos(A_2 A_1) & 1 & \cos(A_2 A_3) \\ \cos(A_3 A_1) & \cos(A_3 A_2) & 1 \end{vmatrix}$$

et les cosinus qui entrent dans cette expression, sont en outre liés par la relation

$$(30)\quad \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) + \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) + \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = -c.$$

Nous pouvons regarder λ^4 comme une fonction des deux variables indépendantes $\cos(A_2 A_3) = \alpha_1$, $\cos(A_1 A_3) = \alpha_2$; et, puisqu'aux environs du maximum ou du minimum α_1 et α_2 sont des quantités négatives, on peut, pour décider la question, n'étudier les variations de λ^4 que lorsque α_1 et α_2 varient toutes deux de o à — 1. Or

pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, λ^4 est négatif;

pour $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, λ^4 est encore négatif;

mais, comme nous savons d'ailleurs que, pour les valeurs négatives de α_1, α_2, correspondant à la valeur maximum ou minimum, λ^4 est positif, et qu'en outre il n'y a ou qu'un maximum ou qu'un minimum, on voit que, lorsque α_1 et α_2 prendront toutes les valeurs possibles de o à — 1, la quantité λ^4, d'abord négative, s'annulera pour certaines valeurs de α_1 et α_2, deviendra ensuite positive, s'annulera encore, et redeviendra enfin négative; donc le volume passe par un maximum. Ainsi,

Parmi les tétraèdres dont les aires des faces sont données, il y en a toujours un, et un seul, dont le volume est un maximum. [Les aires doivent, bien entendu, vérifier l'inégalité (24).]

Il me semble que la question, au point de vue analytique, se trouve complétement élucidée. Il nous reste à

signaler plusieurs des propriétés géométriques que possède le tétraèdre de volume maximum. Les groupes de formules établies à la fin du § II, nos 9, 10, 11, 12, 13, nous seront très-utiles pour cette recherche.

§ IV. — *Propriétés du tétraèdre maximum.*

26. Introduisons dans les formules qui viennent d'être citées l'hypothèse particulière

$$(1)\qquad r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) = \sqrt{\theta}$$

et posons toujours

$$(2)\qquad 2c = f_1 + f_2 + f_3 - f,$$

on trouve d'abord les valeurs suivantes, déjà employées :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = \theta - r_1^2\sqrt{\theta},\\ &\sqrt{f_3 f_1}\cos(A_1 A_3) = \theta - r_2^2\sqrt{\theta},\\ &\sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) = \theta - r_3^2\sqrt{\theta},\\ &r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 3\sqrt{\theta} + \frac{c}{\sqrt{\theta}}. \end{aligned}\right.$$

Les trois premières relations du groupe (VI) deviennent

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho_1^2 &= r_2^2 + r_3^2 - 2\sqrt{\theta},\\ \rho_2^2 &= r_3^2 + r_1^2 - 2\sqrt{\theta},\\ \rho_3^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2\sqrt{\theta}. \end{aligned}\right.$$

Les égalités suivantes du même groupe donnent alors

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho_2\rho_3\cos(\rho_2\rho_3) &= r_1\rho_3\cos(r_1\rho_3) = r_1\rho_2\cos(r_1\rho_2) = r_1^2 - \sqrt{\theta},\\ \rho_1\rho_3\cos(\rho_1\rho_3) &= r_2\rho_1\cos(r_2\rho_1) = r_2\rho_3\cos(r_2\rho_3) = r_2^2 - \sqrt{\theta},\\ \rho_1\rho_2\cos(\rho_1\rho_2) &= r_3\rho_1\cos(r_3\rho_1) = r_3\rho_2\cos(r_3\rho_2) = r_3^2 - \sqrt{\theta}. \end{aligned}\right.$$

Les relations (5), rapprochées des relations (1), nous conduisent au théorème suivant :

Théorème I. — *Le produit de deux arêtes quelconques correspondant à un même sommet par le cosinus de l'angle compris est constant pour un même sommet.*

Et comme les égalités (1) et (5) peuvent encore s'écrire

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{f_1}}{\operatorname{tang}(r_2 r_3)} = \dfrac{\sqrt{f_2}}{\operatorname{tang}(r_1 r_3)} = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\operatorname{tang}(r_1 r_2)} = \sqrt{\theta}, \\ \dfrac{\sqrt{f}}{\operatorname{tang}(\rho_2 \rho_3)} = \dfrac{\sqrt{f_2}}{\operatorname{tang}(r_1 \rho_2)} = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\operatorname{tang}(r_1 \rho_3)} = r_1^2 - \sqrt{\theta}, \\ \dfrac{\sqrt{f}}{\operatorname{tang}(\rho_1 \rho_3)} = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\operatorname{tang}(r_2 \rho_3)} = \dfrac{\sqrt{f_1}}{\operatorname{tang}(r_2 \rho_1)} = r_2^2 - \sqrt{\theta}, \\ \dfrac{\sqrt{f}}{\operatorname{tang}(\rho_1 \rho_2)} = \dfrac{\sqrt{f_2}}{\operatorname{tang}(r_3 \rho_2)} = \dfrac{\sqrt{f_1}}{\operatorname{tang}(r_3 \rho_1)} = r_3^2 - \sqrt{\theta}, \end{cases}$$

on peut substituer au premier énoncé le suivant :

Les tangentes des angles correspondant à un même sommet sont respectivement proportionnelles aux aires des faces qui forment ce sommet.

27. Le groupe (IV) nous donne

$$(7)\qquad \cos(r_1 \rho_1) = \cos(r_2 \rho_2) = \cos(r_3 \rho_3) = 0,$$

c'est-à-dire :

Théorème II. — *Les arêtes du tétraèdre maximum sont perpendiculaires entre elles.*

C'est une propriété fondamentale qui rattache ce tétraèdre à des tétraèdres déjà étudiés.

Les relations du groupe (VI), la première par exemple, nous donnent

$$r_1^2 + \rho_1^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2\sqrt{\theta} = \sqrt{\theta} + \frac{c}{\sqrt{\theta}};$$

d'où nous concluons

$$(8) \qquad r_1^2 + \rho_1^2 = r_2^2 + \rho_2^2 = r_3^2 + \rho_3^2 = \sqrt{\theta} + \frac{c}{\sqrt{\theta}},$$

ou, en langage ordinaire,

THÉORÈME III. — *La somme des carrés des arêtes opposées est constante.*

28. La perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la face OM_2M_3 a pour équations

$$\frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1} = K_1;$$

d'où

$$x = x_1 + K_1 X_1, \quad y = y_1 + K_1 Y_1, \quad z = z_1 + K_1 Z_1;$$

multiplions successivement par x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, et opérons de même pour les autres sommets; on a :

Pour la hauteur correspondant

au sommet M_1.... $\begin{cases} xx_2 + yy_2 + zz_2 = r_1 r_2 \cos(r_1 r_2), \\ xx_3 + yy_3 + zz_3 = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3); \end{cases}$

au sommet M_2.... $\begin{cases} xx_3 + yy_3 + zz_3 = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3), \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 = r_2 r_1 \cos(r_2 r_1); \end{cases}$

au sommet M_3.... $\begin{cases} xx_1 + yy_1 + zz_1 = r_3 r_1 \cos(r_3 r_1), \\ xx_2 + yy_2 + zz_2 = r_3 r_2 \cos(r_3 r_2); \end{cases}$

au sommet O..... $\begin{cases} x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2) + z(z_1 - z_2) = 0, \\ x(x_1 - x_3) + y(y_1 - y_3) + z(z_1 - z_3) = 0. \end{cases}$

Si nous considérons, par exemple, les hauteurs relatives aux sommets M_1 et M_2, on voit que les deux plans

$$xx_3 + yy_3 + zz_3 = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3),$$
$$xx_3 + yy_3 + zz_3 = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3),$$

se confondent, eu égard aux relations (1); par suite ces deux droites sont concourantes.

Les coordonnées du point de concours des hauteurs correspondant aux sommets M_1 et M_2 sont :

$$\lambda x = a_{12} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3,$$
$$\lambda y = a_{12} Y_1 + a_{12} Y_2 + a_{13} Y_3,$$
$$\lambda z = a_{12} Z_1 + a_{12} Z_2 + a_{13} Z_3.$$

Or, en vertu des égalités (1), ces valeurs vérifient les équations qui déterminent les hauteurs correspondant aux sommets M_3 et O; donc :

THÉORÈME IV.— *Les hauteurs du tétraèdre maximum sont concourantes.*

Cette propriété est une conséquence de celle qui est énoncée dans le théorème II.

29. En combinant convenablement les égalités du groupe (VI) et en ayant égard aux valeurs (1) et (5), on arrive à

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{pour le sommet O.......} & \left\{\begin{array}{l} r_1^2(r_2^2 - r_3^2) = f_3 - f_2, \\ r_2^2(r_3^2 - r_1^2) = f_1 - f_3, \\ r_3^2(r_1^2 - r_2^2) = f_2 - f_1; \end{array}\right. \\
\text{pour le sommet } M_1\text{......} & \left\{\begin{array}{l} r_1^2(\rho_2^2 - \rho_3^2) = f_2 - f_3, \\ \rho_2^2(\rho_3^2 - r_1^2) = f - f_2, \\ \rho_3^2(r_1^2 - \rho_2^2) = f_3 - f; \end{array}\right. \\
\text{pour le sommet } M_2\text{.....} & \left\{\begin{array}{l} r_2^2(\rho_3^2 - \rho_1^2) = f_3 - f_1, \\ \rho_3^2(\rho_1^2 - r_2^2) = f - f_3, \\ \rho_1^2(r_2^2 - \rho_3^2) = f_1 - f; \end{array}\right. \\
\text{pour le sommet } M_3\text{......} & \left\{\begin{array}{l} r_3^2(\rho_1^2 - \rho_2^2) = f_1 - f_2, \\ \rho_1^2(\rho_2^2 - r_3^2) = f - f_1, \\ \rho_2^2(r_3^2 - \rho_1^2) = f_2 - f. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

De là le théorème suivant :

Théorème V. — *Le produit du carré d'une arête par la différence des carrés des arêtes appartenant au même sommet, est égal à quatre fois la différence des carrés des aires des faces adjacentes à la première arête.*

Des égalités précédentes, on conclut

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} r_3 < r_2 < r_1, \\ \rho_1 < \rho_2 < \rho_3, \\ \rho_2 < \rho_3 < r_1, \\ \rho_1 < \rho_2 < r_3, \\ \rho_1 < r_2 < \rho_3. \end{array}\right.$$

Les relations (9) nous fournissent encore les suivantes

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f_3 - f_2}{r_1^2} + \dfrac{f_1 - f_3}{r_2^2} + \dfrac{f_2 - f_1}{r_3^2} = 0, \\ \dfrac{f_2 - f_3}{r_1^2} + \dfrac{f - f_2}{\rho_2^2} + \dfrac{f_3 - f}{\rho_3^2} = 0, \\ \dfrac{f_1 - f}{\rho_1^2} + \dfrac{f_3 - f_1}{r_2^2} + \dfrac{f - f_3}{\rho_3^2} = 0, \\ \dfrac{f - f_1}{\rho_1^2} + \dfrac{f_2 - f}{\rho_2^2} + \dfrac{f_1 - f_2}{r_3^2} = 0, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire

Théorème VI. — *La somme des quotients de la différence des carrés des faces appartenant à un même sommet par le carré de l'arête adjacente, est égale à zéro.*

On conclut aussi des mêmes relations

$$(12)\quad r_1^2(\rho_2^2 - \rho_3^2) + r_2^2(\rho_3^2 - \rho_1^2) + r_3^2(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0,$$

ou, en d'autres termes :

Théorème VII. — *La somme des produits des carrés*

des arêtes appartenant à un même sommet par la différence des carrés des arêtes arrivant à l'autre extrémité de l'arête considérée est égale à zéro.

(*La suite prochainement.*)

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES CUBIQUES GAUCHES

(voir p. 287);

PAR M. L. CREMONA,
Professeur à l'Université de Bologne.

Toutes les coniques (locales des pôles) conjointes, situées dans un faisceau de plans conjoints, sont sur un même hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la cubique gauche et passant par les tangentes de cette courbe situées dans les plans osculateurs qui appartiennent au faisceau (*).

Tous les cônes (enveloppes de plans polaires) conjoints, dont les sommets sont situés sur une corde de la cubique gauche, sont circonscrits à un même hyperboloïde passant par la courbe gauche et par les tangentes de celle-ci, rencontrées par la corde donnée.

Ce sont les mêmes hyperboloïdes trouvés au n° 8.

D'après le premier de ces théorèmes, toutes ces coniques inscrites dans un hyperboloïde et situées dans des plans passant par une même droite (directrice) sont les lignes de contact d'autant de cônes du second degré circonscrits à la surface, et dont les sommets sont situés sur une même droite (la focale oo'). Ainsi, par exemple, o'

(*) *Annali di Matematica*, t. I, § 28, settembre-ottobre 1858. — *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, Band 58, § 16. Berlin, 1860.

est le pôle du plan O par rapport à l'hyperboloïde, et *vice versâ* o est le pôle du plan O'. Donc l'hyberboloïde est touché, suivant la conique (locale des pôles de O') conjointe située en O, par des plans passant par o'; parmi ces plans, il y a les trois plans osculateurs de la cubique gauche en a', b', c'; donc cette conique locale est tangente en d, e, f aux droites hk, kg, gh, respectivement.

De ce qui précède on conclut encore que o est le pôle de la directrice xy par rapport à la conique locale, et par conséquent cette courbe passe par les points p, q, r.

On peut donc énoncer ces théorèmes :

Tout hyperboloïde inscrit dans la développable osculatrice de la cubique gauche contient deux tangentes de celle-ci. La droite (focale) qui joint les deux points de contact et la droite (directrice) intersection des deux plans osculateurs en ces points sont polaires réciproques, par rapport à l'hyperboloïde; car chaque point de la focale est le pôle du plan focal du point conjoint au premier point. Chaque couple de plans conjoints, menés par la directrice, rencontre la cubique en six points qui se correspondent deux à deux; les droites intersections des plans osculateurs aux points correspondants sont génératrices de l'hyperboloïde. Chaque plan mené par la directrice coupe l'hyperboloïde suivant une conique qui est le lieu des pôles du plan conjoint, par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice.

Tout hyberboloïde passant par la cubique gauche contient deux tangentes de celle-ci. La droite (focale) qui joint les deux points de contact et la droite (directrice) intersection des deux plans osculateurs en ces points, sont polaires réciproques par rapport à l'hyperboloïde, car chaque plan mené par la directrice est le plan polaire du foyer du plan conjoint au premier plan.

Chaque couple de points conjoints pris sur la focale donne six plans osculateurs, dont les points de contact avec la cubique se correspondent deux à deux; les droites qui joignent les points correspondants sont génératrices de l'hyperboloïde. Chaque point de la focale est le sommet d'un cône du second degré circonscrit à cette surface; ce cône est l'enveloppe des plans polaires du point conjoint au sommet, par rapport aux cônes du second degré passant par la courbe gauche.

Ainsi, *par deux droites tangentes à la cubique gauche, on peut mener deux hyperboloïdes, l'un passant par la cubique, l'autre inscrit dans la développable osculatrice. Ces hyperboloïdes sont réciproques entre eux par rapport à la courbe gauche*, c'est-à-dire que *les points de chacun d'eux sont les foyers des plans tangents à l'autre. Ces mêmes surfaces ont en commun deux droites associées* (5) *passant par les points de contact des tangentes données avec la cubique.*

12. La développable osculatrice de la cubique gauche a pour trace, sur un plan quelconque, une courbe du quatrième ordre (et de la troisième classe) ayant trois points de rebroussement, lesquels sont les points d'intersection de la courbe gauche par le plan (*). La *directrice* du plan donné est la tangente double de cette courbe plane (**); et les deux points de contact sur cette tangente sont les traces des droites tangentes à la cubique gauche et situées dans les plans osculateurs qui passent par la directrice. On sait d'ailleurs que, si une courbe plane de la troisième classe et du quatrième ordre a un seul point *réel* de rebroussement, la tangente double a ses

---

(*) *Compte rendu, etc., u. s.*, § 44.

(**) SCHROTER, *Journal fur die reine und ang. Mathematik*, Band 56, p. 33.

deux contacts *réels*, et que, si la couche a trois rebroussements *réels*, la tangente double est une droite *isolée* (*). Donc

Tout plan mené par une droite qui est l'intersection de deux plans osculateurs réels de la cubique gauche rencontre cette courbe en un seul point réel. Tout plan mené par une droite intersection (idéale) de deux plans osculateurs imaginaires de la cubique gauche, rencontre cette courbe en trois points réels.

Par un point donné sur une corde réelle de la cubique gauche on peut mener à celle-ci un plan osculateur réel. Par un point donné sur une corde idéale de la cubique gauche on peut mener à celle-ci trois plans osculateurs réels.

C'est-à-dire que :

Si une involution de plans conjoints a les plans doubles réels (imaginaires), chaque plan du faisceau coupe la cubique gauche en un seul point réel (en trois points réels).

Si une involution de points conjoints a les points doubles réels (imaginaires) par chaque point de la droite, lieu de l'involution, passe un seul plan osculateur réel (passent trois plans osculateurs réels) de la cubique gauche (**).

13. A présent, appliquons ces propriétés au cas très-important où le plan O' conjoint au plan O est à distance infinie. Alors les pôles du plan O', par rapport aux coniques inscrites dans la développable osculatrice, deviendront les centres de ces coniques; donc (n° 3) :

Les centres des coniques inscrites dans la développa-

(*) Plucker, *Theorie der algebraischen curven*, p. 196. Bonn, 1839.
(**) *Annali di Matematica*, t. II, § 8, gennajo–febbrajo 1859.

ble osculatrice de la cubique gauche sont sur une conique dont le plan a son conjoint à l'infini (*).

J'appelle *conique centrale* cette courbe, lieu des centres des coniques inscrites; *plan central* le plan de la conique centrale, c'est-à-dire le plan qui a son conjoint à l'infini; *focale centrale* la droite focale du point o foyer du plan central O; *faisceau central* le système des plans, conjoints deux à deux, parallèles au plan central. Le foyer du plan central est le centre de la conique centrale (nº 11).

La droite (à l'infini), intersection du plan central par son conjoint, est leur directrice commune : ainsi cette droite sera l'intersection de deux plans osculateurs réels ou imaginaires, selon que le plan à l'infini rencontre la cubique gauche en un seul point réel ou en trois points réels (nº 12). Donc :

Si la cubique gauche a trois asymptotes réelles, il n'y a pas de plans osculateurs parallèles réels.

Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle, il y a deux plans osculateurs réels parallèles et équidistants du plan central (**).

Je dis *équidistants*, car ces plans osculateurs sont conjugués harmoniques par rapport au plan central et au plan conjoint, qui est à l'infini (nº 3).

J'ai déjà adopté, dans mon Mémoire sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe, inséré au *Journal mathématique de Berlin*, tom. LVIII), les dénominations d'*hyperbole gauche*, *ellipse gauche*, *hyperbole parabolique gauche* et *parabole gauche*, proposées par M. Seydewitz (*voir* l'Introduction de ce Mémoire). Je continuerai à m'en servir.

(*) *Annali di Matematica*, t. I, § 27, settembre-ottobre 1858.

(**) *Annali di Matematica*, t. II, luglio ed agosto 1859.

14. Chaque conique inscrite dans la développable osculatrice est l'enveloppe des droites intersections d'un même plan osculateur par tous les autres. Donc, pour l'ellipse gauche, la conique inscrite située dans chacun des deux plans osculateurs parallèles, a une droite tangente à l'infini. Donc

Les plans osculateurs parallèles de l'ellipse gauche coupent la développable osculatrice suivant deux paraboles (*).

On a vu que la conique *locale des pôles*, dans le plan O, rencontre la directrice en deux points x, y qui sont les traces des droites tangentes à la cubique contenues dans les plans osculateurs passant par la directrice, c'est-à-dire en deux points x, y qui sont les contacts de la directrice avec les coniques inscrites situées dans ces mêmes plans osculateurs (n° 11). Donc

Le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice de l'hyperbole gauche est une ellipse dont le plan (le plan central) *rencontre la courbe gauche en trois points réels.*

Le lieu des centres des coniques inscrites dans la développable osculatrice de l'ellipse gauche est une hyperbole dont le plan (le plan central) *rencontre la courbe gauche en un seul point réel. Les asymptotes de l'hyperbole centrale sont parallèles aux diamètres des paraboles inscrites qui sont situées dans les plans osculateurs parallèles* (**).

On conclut des théorèmes démontrés ci-dessus que, si la cubique gauche a trois asymptotes réelles, le plan central contient la figure ci-après décrite : a, b, c sont les trois points de la cubique gauche; d, e, f les pieds des asympto-

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.
(**) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

tes; hk, kg, gh, les traces des plans osculateurs passant par les asymptotes; mn, nl, lm les traces des plans tangents à la cubique en a, b, c et parallèles aux asymptotes, respectivement; ao, bo, co les traces des plans osculateurs en a, b, c; p, q, r les centres des hyberboles, suivant lesquelles la courbe gauche est projetée par les trois cylindres passant par elle (cônes perspectifs dont les sommets sont à l'infini). Ces hyperboles passent toutes par a, b, c; de plus, la première passe par d, la seconde par e, la troisième par f. Les asymptotes de la première hyperbole (n° 9) sont parallèles à ob, oc, celles de la seconde à oc, oa; et celles de la troisième à oa, ob. L'ellipse centrale est inscrite dans le triangle ghk et passe par les points d, e, f, p, q, r; son centre est o, foyer du plan central. Ce même point o est le centre de gravité de tous les triangles def, pqr, ghk, abc, lmn qui sont homothétiques entre eux. De plus, on a : $ag = gp = po = od \ldots.$

Coniques inscrites dans la développable osculatrice.

15. Je me propose maintenant de déterminer l'espèce des coniques inscrites dans la développable osculatrice de la cubique gauche, c'est-à-dire l'espèce des coniques suivant lesquelles cette surface développable est coupée par les plans osculateurs de la cubique.

Commençons par l'hyperbole gauche qui a trois points réels distincts i, i', i'' à l'infini. Le plan osculateur en i contient une conique inscrite qui passe par i et y est touchée par l'asymptote correspondante de la courbe gauche. Donc cette conique inscrite est une hyperbole qui a l'asymptote correspondante au point i, en commun avec la courbe gauche. De même pour les coniques inscrites dans les plans osculateurs en i' et i''.

Considérons les hyperboles inscrites A, B, situées dans les plans a, b osculateurs à la cubique en i, i' (points à

l'infini) ; elles suffisent pour déterminer complétement la développable osculatrice. La droite intersection des plans a, b est une tangente commune aux deux coniques A, B; soient α, β les points de contact; alors βi et $\alpha i'$ sont les asymptotes de la courbe gauche, lesquelles appartiennent aussi, séparément, aux coniques A et B. Par un point quelconque o de $\alpha\beta$ menons $o\mu$ tangente à la conique A et $o\nu$ tangente à la conique B (μ, ν points de contact); $\mu o \nu$ est un plan osculateur et $\mu\nu$ est une tangente de la cubique gauche. Pour connaître l'espèce de la conique inscrite, située dans ce plan $\mu o \nu$, il faut évidemment demander combien de tangentes réelles de la cubique gauche sont parallèles au plan $\mu o \nu$, c'est-à-dire combien de fois la développable osculatrice est rencontrée *réellement* par la droite intersection du plan $\mu o \nu$ et du plan à l'infini.

Pour répondre à cette question, je trace, dans le plan a, une droite quelconque parallèle à $o\mu$; soient m, m' les points où cette parallèle rencontre A; les tangentes à cette conique en m, m' couperont $\alpha\beta$ en deux points l, l'. Si mm' se meut parallèlement à $o\mu$, les points l, l' engendrent une involution.

Par l, l' menons les tangentes à l'hyperbole B; la droite qui joint les points de contact n, n' passera toujours par un point fixe x (à cause de l'involution ll'...) (*). Cherchons x.

Si mm' se confond avec $o\mu$, nn' coïncide avec $o\nu$; donc x est sur $o\nu$. Ensuite supposons que mm' devienne tangente à la conique A, sans coïncider avec $o\mu$; soit q le point où $\alpha\beta$ est rencontrée par cette tangente de A, parallèle à $o\mu$; menons par q la tangente à B; cette droite passera par x. Donc le point x est l'intersection de $o\nu$ par la tangente à B menée du point q.

(*) SCHROTER, *ut supra*, p. 32.

On peut déterminer q indépendamment de A. En effet, on sait que les couples de tangentes parallèles d'une conique marquent sur une tangente fixe une involution de points, dont le point central est le contact de la tangente fixe et les points doubles sont les intersections de celle-ci par les asymptotes. Donc les points o, q sont conjugués dans une involution qui a le point central α et le point double β; ainsi on aura

$$\alpha o \,.\, \alpha q = \overline{\alpha\beta}^2,$$

ce qui donne q.

Or, les droites analogues à mm' sont les traces, sur le plan a, d'autant de plans parallèles au plan $\mu o \nu$; donc ces plans couperont le plan b suivant des droites parallèles à $o\nu$, dont chacune correspond à une droite (nn') issue de x. Ainsi nous aurons dans le plan b deux faisceaux homographiques : l'un de droites parallèles à $o\nu$, l'autre de droites passant par x. Les deux faisceaux sont perspectifs, car $o\nu$ est un rayon commun, correspondant à lui-même; donc les intersections des autres rayons homologues formeront une droite rs qui coupera évidemment la conique B aux points où aboutissent les tangentes de la cubique gauche parallèles au plan $\mu o \nu$. Ainsi ces (deux) tangentes sont réelles ou imaginaires, selon que rs rencontre B en deux points réels ou imaginaires. Cherchons rs.

Concevons que mm' (et par conséquent aussi la droite parallèle à $o\nu$) tombe à l'infini; alors l, l' deviennent les intersections de $\alpha\beta$ par les asymptotes de A, ou bien les points β, β'. Si par β' on mène la tangente à B, et qu'on joigne le point de contact à β, on aura une droite passant par x, laquelle correspondra à nn' infiniment éloignée. Cela revient à dire que rs est parallèle à $x\beta$.

Ensuite, je fais coïncider nn' avec xq; il est évident

que, dans ce cas, la parallèle à ov vient à passer par q; donc q est un point de rs. Concluons que la droite cherchée passe par q et est parallèle à $x\beta$.

Nous avons vu que α est le point central et β un point double d'une involution $(ll'...)$ sur $\alpha\beta$, où o et q sont deux points conjugués. Si par chaque couple de points conjugués on mène les tangentes à la conique B, le point de leur concours engendre la droite $x\beta$. Soit c le centre de l'hyperbole B; et cherchons le point γ où $x\beta$ rencontre l'asymptote $c\alpha$. Dans l'involution mentionnée, le point conjugué à α est à l'infini, c'est-à-dire qu'il est déterminé par la droite tangente à B et parallèle à $\alpha\beta$. Donc γ sera l'intersection de cette tangente par l'asymptote $c\alpha$. Il s'ensuit que γ est sur le prolongement de αc et que $\gamma c = c\alpha$.

Soient δ et α' les points où l'autre asymptote de B est coupée par $\beta\gamma$ et $\alpha\beta$, respectivement. Le triangle $\alpha c \alpha'$ et la transversale $\beta\delta\gamma$ donnent (théorème de Ménélaus)

$$\gamma c \,.\, \beta\alpha \,.\, \delta\alpha' = \gamma\alpha \,.\, \alpha'\beta \,.\, c\delta;$$

mais on a

$$\gamma\alpha = 2\gamma c, \quad \alpha'\beta = \beta\alpha, \qquad \text{donc} \qquad \delta\alpha' = 2c\delta.$$

Il s'ensuit que la droite $\beta\gamma$ a un segment *fini* compris dans l'intérieur d'un des angles asymptotiques qui ne contiennent pas l'hyperbole B. Il en sera de même de rs, qui est parallèle à $\beta\gamma$. Or, toute droite qui a cette position, rencontre l'hyperbole *en deux points réels;* donc, pour chaque plan osculateur de l'hyperbole gauche il y a deux tangentes réelles de cette courbe, qui sont parallèles au plan. Ainsi

Tout plan osculateur de l'hyperbole gauche coupe la surface développable osculatrice suivant une hyperbole (*).

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

16. Si deux des trois points à l'infini coïncident en un seul, la cubique gauche a une seule asymptote à distance finie; les deux autres coïncident à l'infini. La courbe a reçu, dans ce cas, le nom d'*hyperbole parabolique gauche*. Désignons par i le point où la courbe est touchée par le plan à l'infini; par i' le point où ce plan est simplement sécant. La tangente en i est tout entière à l'infini; donc la conique inscrite, située dans le plan a osculateur en i, est une parabole A. Ce même plan contient la conique centrale, car il est conjoint au plan à l'infini (n° 3).

Le plan b osculateur en i' contient une hyperbole inscrite B, car la tangente (asymptote) en i' est à distance finie. Soit α le point où la parabole A est tangente à la droite intersection des plans a, b; il est évident que cette droite est une asymptote de B, c'est-à-dire que α est le centre de cette hyperbole.

Prenons arbitrairement le point o sur la droite nommée, et menons $o\mu$ tangente à la parabole A, $o\nu$ tangente à l'hyperbole B. Combien de tangentes de la cubique gauche sont parallèles au plan osculateur $\mu o \nu$?

Soient m, m' deux points de A tels, que mm' soit parallèle à $o\mu$; les tangentes en m, m' à la conique A rencontrent αo en l, l'. Menons par ces points les tangentes ln, $l'n'$ à B; la corde de contact nn' passera par un point fixe de $o\nu$. Pour trouver ce point, j'observe que si mm' tombe à l'infini, elle devient une tangente de A; par conséquent, la position correspondante de nn' est αo. Donc le point fixe autour duquel tourne nn' est o.

En poursuivant les raisonnements dont on a fait usage dans le numéro précédent, nous aurons à considérer, dans le plan b, deux faisceaux homographiques de droites; le centre du premier est à l'infini sur $o\nu$; le centre du second est o. La droite $o\nu$ est un rayon homologue à lui-

même; donc les deux faisceaux engendreront une droite rs.

Si mm' tombe à l'infini, la droite parallèle à $o\nu$ s'éloigne aussi infiniment, et nn' coïncide avec αo; donc le point à l'infini de αo appartient à rs, c'est-à-dire que la droite rs est parallèle à αo. De plus, on voit aisément que, si $o\nu$ coupe l'asymptote $\alpha i'$ en o', et que l'on prenne, sur le prolongement de $o'\alpha$, le point r tel, que $r\alpha = \alpha o'$, la droite cherchée passera par r.

La droite rs est parallèle à une asymptote (αo) de l'hyperbole B; ainsi elle rencontre cette courbe en un point *réel* à l'infini; donc rs passe par un autre point réel de la même courbe. Ce qui revient à dire que le plan osculateur $\mu o \nu$ rencontre à l'infini, outre l'asymptote de la cubique gauche en i, une autre tangente de cette courbe. Donc

Les plans osculateurs de l'hyperbole parabolique gauche coupent la développable osculatrice de cette courbe suivant des coniques qui sont des hyperboles, à l'exception d'une seule qui est une parabole. Les centres des hyperboles sont sur une autre parabole (*).

Les deux paraboles sont dans un même plan, ont les diamètres parallèles et sont touchées au même point par le plan osculateur qui contient l'asymptote (à distance finie) de la courbe gauche.

Chacune des hyperboles inscrites a une asymptote parallèle à un plan fixe; c'est le plan osculateur qui contient l'asymptote (de la courbe gauche) située tout entière à l'infini.

17. Si la cubique gauche a un plan osculateur à l'infini (*parabole gauche*), on voit sans peine que toute conique inscrite dans la développable osculatrice a une

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

tangente à l'infini, et qu'il n'y a plus de plan central. Donc

Toutes les coniques inscrites dans la développable osculatrice de la parabole gauche sont des paraboles (planes).

(*La fin prochainement.*)

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De M. DIEU,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Je vous demande la permission de répondre deux mots à la lettre de M. l'inspecteur général Vieille, insérée par extrait dans votre numéro du mois de juillet.

Le problème de mécanique du concours de 1845 a été traité dans les *Nouvelles Annales* par M. Turquan en 1846, cinq ans avant la publication du Cours de M. Vieille. J'ai cité l'article de M. Turquan à la fin de ma solution, page 203, lignes 5 et 6. Les expressions de y et de v en fonction de s se trouvent dans cet article, l'une sous le n° 4, l'autre à la page 531 (tome V). Serait-il juste de dire que M. Vieille les a prises à M. Turquan, sans le citer? Non, sans doute! Personne ne traitera le problème sans arriver d'abord à ces expressions.

Une certaine ressemblance existe effectivement entre ma discussion de y et de v et celle de M. Vieille. Mais les lecteurs impartiaux ne trouveront là, je le crois, que des rapports inévitables entre deux rédactions sur le même sujet.

Quant au reste (six pages sur dix), M. l'Inspecteur général a pris lui-même le soin de faire voir, dans ses obser-

vations sur deux passages, qu'il n'y a plus aucune similitude entre mon travail et le sien. Ces observations me semblent donc contredire aussi complétement que je puis le désirer, la proposition : *Permettez-moi de vous faire observer que la solution de l'auteur coïncide avec celle que j'ai publiée il y a onze ans.*

Enfin l'expression du temps se trouve-t-elle dans le Cours complémentaire?

QUESTION 623;

SOLUTION DE M. ABRAHAM SCHNÉE,
Elève du lycée Charlemagne.

Discussion de l'équation (6) *de la page* 320.

$$(1)\left\{\begin{aligned} & m^2k^2(m^2-1)x^2 - k^2(m-1)y^2 + m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)z^2 \\ & \quad + 2kmayz + 2km^3bxz + 2k^2m^2ax \\ & \quad + 2k^2m^2by - m^2(a^2+b^2+c^2-k^2)k^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Premier cas : $m^2 - 1 \gtrless 0$. — Ce cas suppose les deux directrices non rectangulaires. En multipliant l'équation (1) par $(m^2 - 1)$, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} & m^2k^2(m^2-1)^2x^2 + 2km^2(m^2-1)(mbz+ka)x \\ & -k^2(m^2-1)^2y^2 + 2km(m^2-1)(az+kmb)y \\ & +m^2(m^2-1)(a^2+b^2+c^2-k^2)z^2 \\ & -m^2(m^2-1)(a^2+b^2+c^2-k^2)k^2 \end{aligned}\right\} = 0,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} & m^2[k(m^2-1)x + mbz + ak]^2 \\ & -[k(m^2-1)y - maz - km^2a]^2 \\ & +m^2[m^2(a^2-c^2-k^2) - (b^2+c^2-k^2)]z^2 \\ & -m^2k^2[m^2(a^2+c^2-k^2) - (b^2+c^2-k^2)] \end{aligned}\right\} = 0.$$

Si $m = 0$, on a $y = 0$; si $k = 0$, on a $z = 0$; c'est ce qu'on savait déjà d'après le mode de génération de la surface. Enfin, si l'on suppose à la fois $m = 0, k = 0$, il n'y a plus de surface. Nous supposerons donc m et k différents de zéro.

Si l'on a

$$m^2(a^2 + c^2 - k^2) - (b^2 + c^2 - k^2) = 0,$$

la surface se réduit aux deux plans

$$\begin{aligned} & m[k(m^2-1)x + mbz + ak] \\ &= \pm[k(m^2-1)y - maz - km^2b]. \end{aligned}$$

Lorsqu'on a

$$m^2(a^2 + c^2 - k^2) - (b^2 + c^2 - k^2) \gtrless 0,$$

la surface est un hyperboloïde à une nappe. Les trois plans

$$\begin{aligned} k(m^2-1)x + mbz + ak &= 0, \\ k(m^2-1)y - maz - km^2b &= 0, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

sont trois plans diamétraux conjugués de la surface; ils se coupent au point $x = \frac{-a}{m^2-1}$, $y = \frac{m^2 b}{m^2-1}$, $z = 0$, qui en est le centre.

Note. — En discutant de même le second cas où $m^2 - 1 = 0$, M. Schnée a trouvé que, dans cette hypothèse, l'équation (1) représente un paraboloïde hyperbolique ou différents systèmes de deux plans.

NOTE SUR UNE QUESTION DE MÉCANIQUE;

PAR M. S. VIANT,
Professeur de mathématiques spéciales au Prytanée impérial militaire de la Flèche.

Dans un Traité de Mécanique assez répandu, on trouve une solution inexacte de la question suivante :

Le mouvement d'un point dans un plan étant défini par les deux équations $\rho = f(t)$, $\omega = \varphi(t)$ qui donnent le rayon vecteur et l'angle, trouver les composantes de l'accélération.

Voici une solution fondée sur des principes connus.

Soit MM′ la trajectoire du mobile. A l'époque t la vitesse de *circulation* est $MA = \rho\omega'$ (ω' étant la dérivée de ω par rapport au temps); et à l'époque $t + \Delta t$ la vitesse de circulation devient $M'A' = \rho\omega' + \Delta(\rho\omega')$. Je transporte cette dernière parallèlement à elle-même au point M en MB, il en résulte l'accélération *moyenne* $\frac{AB}{\Delta t}$, dont les composantes sont $\lim \frac{AC}{\Delta t}$ et $\lim \frac{CB}{\Delta t}$. On trouve par un calcul connu

$$\lim \frac{AC}{\Delta t} = (\rho\omega')' \quad \text{et} \quad \lim \frac{CB}{\Delta t} = \rho\omega'^2.$$

D'un autre côté, les vitesses de *glissement* étant $Ma = \rho'$ et $M'a' = \rho' + \Delta\rho'$, je transporte cette dernière au point M en Mb, ce qui donne pour accélération moyenne $\frac{ab}{\Delta t}$. Le calcul indiqué dans les Traités donnera

pour les composantes

$$\lim \frac{ac}{\Delta t} = \rho'' \quad \text{et} \quad \lim \frac{cb}{\Delta t} = \rho'\omega'.$$

Ajoutant convenablement les composantes de même direction, on aura pour la composante de l'accélération suivant le rayon vecteur, $\rho'' - \rho\omega'^2$, et pour la composante perpendiculaire à ce rayon $(\rho\omega')' + \rho'\omega'$, ou $\frac{1}{\rho}(\rho^2\omega')'$.

Ces deux formules ne sont pas exactement celles que donne l'ouvrage indiqué plus haut; mais on les trouve, sans démonstration, dans la *Mécanique* de M. O. Bonnet; elles ont été obtenues au moyen d'un changement de coordonnées, par un de mes élèves, Lenglet, candidat à l'École Polytechnique.

QUESTIONS.

625. Soient α, 6, γ, δ, ε les racines de l'équation $x^5 + 5px^3 + 5p^2x + q = 0$. Démontrer qu'on a

$$\Sigma(\alpha - \delta)(\alpha - \varepsilon)(6 - \delta)(6 - \varepsilon)(\gamma - \delta)(\gamma - \varepsilon)(\delta - \varepsilon)^2 = 0.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

626. Les six points milieux des côtés et des diagonales d'un quadrilatère, les deux points où se coupent les côtés opposés, le point d'intersection des deux diagonales, sont sur une même ligne du second degré.

Lorsque les quatre sommets du quadrilatère appartiennent à une circonférence, la ligne du second degré sur la-

quelle se trouvent les neuf points désignés est une hyperbole équilatère qui passe par le centre de la circonférence, et dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles que forment les deux diagonales du quadrilatère.

627. Les droites inscrites dans un angle droit donné, et qui ont leurs milieux sur une droite rencontrant les côtés de l'angle droit en des points différents, sont toutes tangentes à la même parabole.

628. Étant donné un tétraèdre quelconque, on peut faire passer par les centres de gravité des quatre faces un ellipsoïde tangent à ces mêmes faces. Il aura pour centre le centre de gravité du tétraèdre. Et, si on appelle $3a$, $3b$, $3c$, les arêtes adjacentes à un même angle solide, qu'on prenne des axes parallèles à ces arêtes, et pour origine le centre de gravité du tétraèdre, l'équation de la surface tangente sera

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + \frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} = \frac{3}{8}.$$

(VANNSON.)

629. Étant donné un tétraèdre quelconque, si une surface du second degré passe aux milieux des trois arêtes d'un angle solide et leur est tangente; si, de plus, elle passe aux milieux des trois autres arêtes, elle leur sera également tangente. Cette surface a pour centre le centre de gravité du tétraèdre. (VANNSON.)

630. Le système des deux équations $x^2 = ay^2 + 1$, $x^3 = by^3 + c$, dans lesquelles $a + 1$ et c sont des multiples de 3, et b un nombre entier non divisible par 3, n'admet aucune solution entière.

631. Si l'équation $z^2 = x^4 + ax^2y^2 + by^4$ est réso-

lue par $r^2 = t^4 + at^2 u^2 + u^4$, elle le sera aussi par $x = r^4 - (a^2 - 4b) t^4 u^4$, $y = t^4 - bu^4$, $z = 2rtu$.

(V.-A. Lebesgue.)

DE LA MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES POUR LE CALCUL DES RACINES DES ÉQUATIONS

(voir page 305);

Par M. Léon SANCERY,
Professeur au lycée d'Auch.

V.

Application à l'équation du second degré.

Écrivons l'équation $x^2 + px + q = 0$ de la manière suivante :

$$x = -\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}.$$

La dérivée du second membre est $-\frac{2x}{p}$; on ne pourra utiliser la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines x', x'' que dans le cas où les valeurs $-\frac{2x'}{p}$, $-\frac{2x''}{p}$ seront comprises entre -1 et $+1$.

1° Supposons les racines x', x'' de même signe, et $x' < x''$ en valeur absolue. On aura $p = -(x' + x'')$, par suite $-\frac{2x}{p} = \frac{2x}{x' + x''}$. La valeur de cette dérivée est positive pour $x = x'$, $x = x''$; mais elle n'est inférieure à l'unité que pour $x = x'$. Ainsi la forme ci-dessus donnée à l'équation ne permet que le calcul de la racine qui a la plus petite valeur numérique.

Déterminons quelles peuvent être les valeurs initiales de départ. Il suffit de chercher quelles sont les valeurs i rendent $-\frac{2x}{p} \mid \gtrless_1^0$ et de prendre l'une de ces valeurs.

On trouve ainsi que x doit être compris entre o et $-\frac{p}{2}$.

On peut donc prendre pour première valeur $x_1 = -\frac{q}{p}$; r, les racines étant réelles, $-\frac{q}{p}$ est toujours compris tre o et $-\frac{p}{2}$.

2° Supposons les racines de signes contraires, l'équation est alors $x^2 + px - q = 0$, d'où $x = \frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$. ient x'_1, x''_1 les valeurs absolues des racines et $x'_1 < x''_1$, fonction $-\frac{2x}{p}$ ou $\frac{2x}{x' + x''}$ est positive et plus grande e l'unité pour $x = x''$; elle est négative et égale à $\frac{2x'_1}{x''_1 - x'_1}$, pour $x = x'$. Or, afin que cette valeur soit périeure à -1, il faut que $3x'_1 < x''_1$.

En mettant dans l'équation le signe de p en évidence, ı a

$$x = \mp\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right);$$

onc

$$x'_1 = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}, \quad x''_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

relation $3x'_1 < x''_1$ conduit ainsi à l'inégalité

$$3\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{3p}{2} < \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

qui se réduit à

$$\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}.$$

Ainsi lorsque les racines sont de signes contraires, la forme particulière donnée ci-dessus à l'équation du second degré ne permettra le calcul de la racine qui a la plus petite valeur absolue que lorsque les coefficients satisferont à l'inégalité

$$\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}.$$

Cherchons maintenant une valeur de départ. Nous supposerons, pour plus de simplicité, dans tout ce qui va suivre, p positif. Alors la racine qui a la plus petite valeur numérique est positive.

De la relation $\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}$ on tire $-\frac{4q}{3p^2} > -1$. Si donc on pose $-\frac{4q}{3p^2} = -\frac{2x}{p}$, la valeur $x_1 = \frac{2q}{3p}$ que l'on en déduit rendra la dérivée plus grande que -1 et plus petite que zéro. Cette valeur x_1 est moindre que x'; car, puisque

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = \frac{q}{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}},$$

on aura, en remplaçant dans le dénominateur q par $\frac{3}{4}p^2$,

$$x' > \frac{q}{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{3}{4}p^2}},$$

ou $x' > \frac{2q}{3p}$, c'est-à-dire $x' > x_1$.

Si l'on cherche les limites qui ont été signalées au § IV,

on trouve o et $\frac{p}{2}$, par suite les deux intervalles $\alpha \ldots L$, $L' \ldots \alpha$, sont ici respectivement $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} \ldots o$; $\frac{p}{2} \ldots -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$. En les comparant on voit que si $\frac{q}{p^2}<\frac{5}{16}$, le premier est plus petit que le second; si $q>\frac{5}{16}$, le contraire a lieu. x_1 étant toujours situé dans le premier intervalle, il est établi que lorsque $\frac{q}{p^2}<\frac{5}{16}$, la valeur de départ x_1 fournit des valeurs successives telles, que chacune approche plus de la racine que la précédente.

Nous allons démontrer qu'il en est encore ainsi lorsque $\frac{q}{p^2}>\frac{5}{16}$. En effet, la valeur $x_2=\frac{q}{p}-\frac{4q^2}{9p^3}$ que fournit x_1 étant supérieure à x' et moindre que $\frac{p}{2}$, sera dans le cas actuel située dans le plus petit des deux intervalles $\alpha \ldots L$, $L' \ldots \alpha$, et, par suite, chacune des valeurs obtenues après x_2 approchera plus que la précédente de la racine x'. Si donc $x_2-x'<x'-x_1$, toutes les valeurs qui suivent x_1 seront dans le même cas. Or l'inégalité $x_2-x'<x'-x_1$ devient, lorsque l'on y remplace les quantités qu'elle renferme par leurs valeurs,

$$\frac{q}{p}-\frac{4q^2}{9p^3}+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}<-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\frac{2q}{3p}$$

ou bien

$$9p^4+15p^2q<4q^2+18p^3\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Or si $q=\frac{3}{4}p^2$, on a $x_1=x'=x_2=\frac{p}{2}$. La première inégalité, et par suite la seconde, se transforme dans cette hypothèse en une égalité. Si $q<\frac{3}{4}p^2$, le second membre de la deuxième inégalité acquiert une valeur supérieure à celle qu'il a pour $q=\frac{3}{4}p^2$; le premier, au contraire, prend une valeur inférieure; donc l'inégalité est évidente. Par suite x_2 est plus approché que x_1.

La théorie précédente complète la Note donnée par M. Gerono dans les *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 436. Elle prouve que la méthode des substitutions successives appliquée à l'équation du second degré $x^2+px-q=0$ mise sous la forme $x=\frac{q}{p}-\frac{x^2}{p}$ ne pourra servir au calcul de la racine positive que lorsque $\frac{q}{p^2}<\frac{3}{4}$, et que dans ce cas la quantité $\frac{2q}{3p}$ jouit de la propriété de fournir des valeurs successives approchant chacune plus que la précédente de la racine x'.

Les valeurs de x qui rendent la dérivée $-\frac{2x}{p}>-1$ étant comprises entre 0 et $\frac{p}{2}$, on voit que la quantité $\frac{q}{p}$, qui a servi dans le cas où les racines étaient de même signe, n'est pas forcément comprise entre 0 et $\frac{p}{2}$; il faudrait, pour qu'il en fût ainsi, que $p^2>2q$. L'application de la méthode exigeant seulement que $p^2>\frac{4}{3}q$, on voit que la deuxième inégalité peut être satisfaite sans que la première le soit. Toutefois nous allons démontrer que lors-

que $p^2 > \frac{3}{4} q$, on peut encore prendre pour valeur de départ $x_1 = \frac{q}{p}$.

On a (*)

$$x_{n+1} = \frac{q}{p} - \frac{x_n^2}{p}, \quad x_{n+2} = \frac{q}{p} - \frac{x_{n+1}^2}{p};$$

d'où

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - x_{n+1}^2}{p},$$

ou bien

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -(x_{n+1} - x_n) \frac{x_{n+1} + x_n}{p}.$$

Pour que les deux différences $x_{n+2} - x_{n+1}$, $x_{n+1} - x_n$ soient de signes contraires, et la première numériquement moindre que la seconde, on doit avoir

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0, \quad \frac{x_{n+1} + x_n}{p} < 1.$$

Or

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{p} = \frac{q}{p^2} - \frac{x_n^2}{p^2} + \frac{x_n}{p};$$

les deux inégalités précédentes deviennent donc

$$-x_n^2 + px_n + q > 0, \quad -x_n^2 + px_n + q - p^2 < 0.$$

Pour que la première soit satisfaite, x_n doit être compris entre les racines de l'équation $X^2 - pX - q = 0$, c'est-

(*) Les calculs qui suivent peuvent être reliés entre eux par un raisonnement inverse et fournir ainsi une solution élémentaire plus complète que celle qui a été donnée jusqu'à ce jour, de cette question du programme de mathématiques spéciales : « Résolution de l'équation $ax^2 + bx - c = 0$, » lorsque a est très-petit », si toutefois on emploie pour solution de cette question la méthode des substitutions successives.

à-dire entre

$$\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} \quad \text{et} \quad \frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Quant à la seconde, les racines de l'équation

$$X^2-pX-q+p^2=0$$

étant imaginaires si $3p^2>4q$, elle est satisfaite pour toute valeur de x. Pour que la quantité $\frac{q}{p}$ puisse être une valeur de départ, il suffit de voir si

$$\frac{q}{p}<\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}.$$

Or cette inégalité est satisfaite si l'on a $\frac{q}{p^2}<2$. Ce qui a lieu effectivement.

Lorsque $\frac{q}{p^2}<\frac{3}{4}$ et $\frac{q}{p}$ la valeur de départ, les premières valeurs obtenues peuvent ne pas satisfaire à la condition que chacune d'elles soit plus approchée de la racine que la précédente. Mais l'ensemble des valeurs supérieures à x' tend vers x', et il en est de même des valeurs inférieures. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'une valeur approchée par défaut donne toujours pour la valeur suivante un nombre approchant davantage de la vraie valeur de la racine.

En effet, soient $x_n<x'$, $x_{n+1}>x'$; la différence $x_{n+1}-x'$ sera moindre que $x'-x_n$, si l'on a $x_n+x_{n+1}<2x'$. Substituons les valeurs de x_{n+1} et de x' et posons

$$-p+2\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}>x_n+\frac{q}{p}-\frac{x_n^2}{p}.$$

On en déduit

$$x_n^2 - px_n - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} > 0;$$

x_n doit donc être inférieur à la plus petite des racines

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad \frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

de l'équation

$$x^2 - px - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = 0;$$

et comme cette plus petite racine $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ est la racine elle-même qu'il s'agit de calculer, on voit que l'inégalité

$$x_{n+1} - x' < x' - x_n$$

est satisfaite d'elle-même.

Les valeurs supérieures à x' peuvent au contraire donner des valeurs moins approchées qu'elles-mêmes. En effet, de l'inégalité

$$x_n - x' > x' - x_{n+1}$$

on déduit

$$x_n^2 - px_n - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} < 0,$$

et, par conséquent, x_n est une valeur comprise entre les racines

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad \frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

de l'équation

$$x^2 - px - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = 0.$$

Si donc x_n n'est pas inférieur à $\frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, la valeur x_{n+1} sera moins approchée que x_n. Si l'on pose

$$\frac{q}{p} < \frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

on trouve

$$2 < \left(2 - \frac{q}{p^2}\right)^2,$$

ou bien

$$\frac{q}{p^2} < 2 - \sqrt{2},$$

condition qui a été indiquée par M. Gerono.

On peut montrer que si la condition $q - \frac{3}{4}p^2 < 0$ n'est pas satisfaite, les valeurs successives que l'on obtient doivent, dans le voisinage de la racine x', s'écarter de plus en plus de cette racine. En effet, lorsque $q - \frac{3}{4}p^2 > 0$, les racines

$$X_1 = \frac{p}{2} - \sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}, \quad X_2 = \frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$$

de l'équation

$$X^2 - pX - q + p^2 = 0$$

étant réelles, la fonction $\frac{x_{n+1} + x_n}{p}$ sera supérieure à l'unité pour x_n compris entre X_1 et X_2 et inférieure à 1 lorsque x_n sera moindre que X_1 ou plus grand que X_2.

Cela posé, considérons les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ est positive; ce sont les seules qui intéressent, puisque la racine est positive. Elles sont moindres que $\sqrt{q}$. Supposons X_1 positif, et par suite

$^2 > q$. On aura

$$X_1 < x' < X_2 < \sqrt{q}.$$

'our $x = X_1$, la fonction $\frac{p}{q} - \frac{x^2}{p}$ acquiert la valeur X_2, t pour $x = X_2$ elle est égale à X_1; d'ailleurs on a l'identé

$$x' = \frac{q}{p} - \frac{x'^2}{p}.$$

1° La fonction $\frac{q}{p} - \frac{x}{p}$ étant décroissante lorsque x roît de 0 à ∞, puisque sa dérivée est alors négative, our x compris entre X_1 et x', elle acquerra une va-ur comprise entre x' et X_2; et, pour x intermédiaire ntre x' et X_2, elle prendra une valeur située entre x' t X_1. Il en résulte que si l'on prend une valeur ini-ale comprise entre X_1 et X_2, la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 1$ tant remplie, et par conséquent aussi la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0$, les différences successives $x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} - x_{n+1} \ldots$, seront alternativement de signes con-raires, mais leurs valeurs absolues iront en croissant. es valeurs successives qui sont supérieures à x' s'éloigne-ont donc de x', et il en est de même des valeurs inférieu-es. Les valeurs obtenues pour les différences $x_{n+1} - x_n, \ldots$, ont toujours moindres que $X_2 - X_1$, c'est-à-dire moin-lres que $2\sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$. Mais comme une valeur peu dif-érente de X_1 donne une valeur qui diffère peu de X_2, il n résulte que les différences des valeurs successives que 'on obtient étant prises en valeurs absolues tendent vers $2\sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$.

2° Si l'on donne à x une valeur comprise entre o et X_1, la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ prendra une valeur située entre $\frac{q}{p}$ et X_1; si x est intermédiaire entre X_2 et $\sqrt{q}$, la valeur de la fonction sera comprise entre X_1 et o; d'ailleurs que x soit compris entre o et X_1 ou bien entre X_2 et $\sqrt{q}$, la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0$ est satisfaite; donc si on prend une valeur initiale située entre o et X_1, ou bien entre X_1 et $\sqrt{q}$, les différences successives sont $x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} - x_{n+1}$,..., seront de signes contraires et leurs valeurs absolues iront en décroissant. Les valeurs supérieures à x' décroîtront donc, et les valeurs inférieures iront en croissant; mais ces valeurs ne tendront pas indéfiniment vers la racine x', leurs limites respectives sont X_2 et X_1.

Les réflexions qui précèdent préviennent une erreur que l'on serait porté à commettre par suite d'un examen insuffisant des valeurs successivement obtenues lorsque $p^2 > q > \frac{3}{4}p^2$. Si dans ce cas on part de la valeur $\frac{q}{p}$, on obtient une série de valeurs qui se rapprochent de la racine x, mais qui ne tendent pas indéfiniment vers cette racine.

Supposons X_1 négatif; alors $p^2 < q$, on aura

$$X_1 < x' < \sqrt{q} < X_2;$$

les valeurs qui rendent la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ positive étant toutes comprises entre X_1 et X_2, il s'ensuit que pour toute valeur de départ donnant une suite de valeurs positives, les différences $x_{n+1} - x_n$, ..., iront en augmentant en valeurs absolues, et par conséquent les valeurs obtenues s'éloigneront de plus en plus de la racine x'.

VI.

Application de la même théorie à l'équation du troisième degré.

Nous supposons d'abord les racines réelles. Alors p est négatif et $4p^3 + 27q^2 < 0$. Nous mettrons donc l'équation sous la forme $x^3 - px + q = 0$. On en tire

$$x = \frac{q}{p} + \frac{x^3}{p}.$$

La dérivée du second membre est $\frac{3x^2}{p}$; elle est donc positive pour toute valeur de x. Pour qu'elle soit plus petite que l'unité, x doit être compris entre les racines de l'équation $\frac{3x^2}{p} = 1$, c'est-à-dire entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$. Or les racines de l'équation proposée étant réelles sont comprises entre

$$-\infty \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$-\sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{et} \quad +\sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$+\sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{et} \quad +\infty.$$

La racine qui a la plus petite valeur numérique est donc comprise entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$, et les autres sont en dehors de ces limites. Il en résulte que la forme donnée à l'équation ne permet que le calcul de la racine qui a la plus petite valeur numérique. Les signes de la fonction $x^3 - px + q$, pour $x = -\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x = +\sqrt{\frac{p}{3}}$, étant respectivement $+$ et $-$, et son signe pour $x = 0$ étant celui de q, on voit que, si $q > 0$, la racine est positive;

si $q < 0$, la racine est négative : elle est donc de même signe que q. Or on a $\frac{q}{p}$ moindre en valeur absolue que $\sqrt{\frac{p}{3}}$; donc $\frac{q}{p}$ est une valeur de départ.

Supposons que, p étant négatif, l'équation ait deux racines imaginaires. Alors la racine réelle est de signe contraire à q. Si q est positif, la substitution de $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ dans l'équation donnant un résultat positif, la racine qui est négative est inférieure à $-\sqrt{\frac{p}{3}}$. Si q est négatif, la substitution de $\sqrt{\frac{p}{3}}$ donne un résultat négatif; la racine qui est positive est donc plus grande que $\sqrt{\frac{p}{3}}$. La forme particulière donnée à l'équation ne permet donc pas le calcul de la racine réelle.

Si p est positif, l'équation, en supposant q négatif, devient $x^3 + px - q = 0$. On en déduit $x = \frac{q}{p} - \frac{x^3}{p}$. La dérivée du second membre est négative, quel que soit x; pour qu'elle soit supérieure à -1, il faut que x soit compris entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$; q étant négatif, la racine réelle est positive; elle ne sera inférieure à $+\sqrt{\frac{p}{3}}$ qu'autant que l'on aura $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$. Donc lorsque p est positif, la méthode n'est applicable à la forme $x = \frac{q}{p} - \frac{x^3}{p}$ que dans le cas où $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$.

Si on pose $-\frac{3x^2}{p} = -\frac{27q^2}{16p^3}$, la valeur positive $x_1 = \frac{3q}{4p}$ que l'on en tire pour x rendra la dérivée plus rande que — 1, et s'il en est de même de la valeur $x_2 = \frac{q}{p} - \frac{27q^3}{64p^4}$ que fournit x_1, on pourra prendre x_1 our valeur de départ. En effet, l'une des quantités x_1, x_2 sera nécessairement comprise dans le plus petit des eux intervalles α...L, L'...α signalés au § IV. Voyons onc si l'inégalité

$$\frac{q}{p} - \frac{27q^3}{64p^4} < \sqrt{\frac{p}{3}},$$

aquelle revient à

$$3.64^2 q^2 p^6 + 3.27^2 q^6 < 64^2 p^9 + 2\ 3.27\, q^4 p^3,$$

st vérifiée.

Or si $\frac{q^2}{p^3} = \frac{16}{27}$, on a $x_1 = \frac{3q}{4p} = \sqrt{\frac{p}{3}} = x_2 = x'$, x' étant a racine réelle de l'équation $x^3 + px - q = 0$. La prenière inégalité, et par suite la seconde, se transforment lans cette hypothèse en une égalité. Si $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$, le prenier membre de la deuxième inégalité prend une valeur nférieure à celle qu'il a pour $\frac{q^2}{p^3} = \frac{16}{27}$; le second memore au contraire prend une valeur plus grande : donc l'iségalité est évidente. Par suite $x_1 = \frac{3q}{4p}$ est une valeur de départ.

La quantité $\frac{q}{p}$ qui, dans le premier cas, a servi de valeur de départ, ne jouit pas dans celui-ci de la propriété de rendre toujours la dérivée plus grande que — 1.

VII.

Par les exemples qui précèdent, on voit que la forme

$$x = \varphi(x)$$

donnée à l'équation $F(x) = 0$ ne permet pas le calcul approché de toutes les racines. Nous allons montrer que l'on peut toujours, par la méthode des substitutions successives, calculer toutes les racines de l'équation

$$F(x) = 0,$$

à la condition de savoir trouver la fonction $x = \psi(y)$ inverse de $y = \varphi(x)$.

En effet, admettons que l'on sache trouver cette fonction inverse. On pourra mettre l'équation $F(x) = 0$ ou $x = \varphi(x)$ sous la forme $x = \psi(x)$. Mais, d'après la nature des fonctions $x = \psi(y)$, $y = \varphi(x)$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(y)},$$

x, y étant deux valeurs correspondantes. Or, lorsque x est égal à une racine β de l'équation $F(x) = 0$, $x = y = (\beta)$; donc $\varphi'(\beta) = \frac{1}{\psi'(\beta)}$. Par suite, si, pour une racine β, $\varphi'(\beta)$ est en dehors de l'intervalle $-\ldots+1$, pour cette même valeur $\psi'(\beta)$ sera compris entre -1 et $+1$. Donc la forme $x = \psi(x)$ permet le calcul de la racine β, qui échappe à la relation $x = \varphi(x)$.

Si on applique ces considérations aux équations du deuxième et du troisième degré, on trouvera

$$x = \sqrt{-px - q}, \quad x = \sqrt[3]{-px - q}$$

pour formes inverses de

$$x = -\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}, \quad x = -\frac{q}{p} - \frac{x^3}{p};$$

et, par conséquent, les deux premières expressions fourniront les racines que ne donnent pas les deux dernières.

VIII.

Supposons actuellement que l'équation

$$F(x) = 0$$

e puisse être mise que sous la forme $\psi(x) = \varphi(x)$.

On peut toujours regarder le x du premier membre omme une fonction explicite de $\varphi(x)$ et poser

$$x = \xi[\varphi(x)].$$

Dès lors, si, pour une racine α, $\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha)$ était ompris entre — et + 1, on pourrait déterminer α par es calculs suivants :

$$x_2 = \xi[\varphi(x_1)],$$
$$x_3 = \xi[\varphi(x_2)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or la forme explicite $\xi[\varphi(x)]$ n'étant pas connue, par ıypothèse, on ne pourra déterminer les quantités $x_2, x_3, \ldots$ que par la résolution des équations

$$\psi(x) = \varphi(x_1), \quad \psi(x) = \varphi(x_2), \ldots,$$

La méthode ne sera donc réellement applicable à la détermination de la racine α qu'autant que l'on pourra, à l'aide de tables, calculer la valeur de x qui fait acquérir à $\psi(x)$ une valeur donnée.

En supposant qu'il en soit ainsi, il reste à faire voir comment on pourra reconnaître que $\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha)$ est compris entre — 1 et + 1. $\xi'[\varphi(x)].\varphi'(x)$ est la dérivée u' de la fonction u définie par $u = \xi[\varphi(x)]$, ou encore

par $\psi(u) = \varphi(x)$. Or, en différentiant les deux membres de cette dernière équation, on a

$$\psi'(u).u' = \varphi'(x),$$

d'où

$$u' = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)};$$

par suite

$$\xi'[\varphi(x)].\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)}.$$

Dès lors les procédés ordinaires qui, à l'aide de la fonction $\xi'[\varphi(x)].\varphi'(x)$ permettent de reconnaître que $\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha)$ est comprise entre -1 et $+1$, pourront s'appliquer à la fonction $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)}$, puisque u est numériquement connu par les tables.

Si l'on remarque que, pour $x = \alpha$, u est aussi égal à α, on aura

$$\xi'[\varphi(\alpha)].\varphi'(\alpha) = \frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)},$$

et par conséquent si, pour une certaine racine α, la fraction $\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$ n'était pas intermédiaire entre -1 et $+1$, la fraction inverse $\frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ jouirait au contraire de cette propriété. Il en résulte qu'en supposant la résolution de l'équation $\varphi(x) = A$ possible à l'aide des tables, la racine α pourra être calculée à l'aide des opérations suivantes :

$$\varphi(x_2) = \psi(x_1),$$
$$\varphi(x_3) = \psi(x_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(*Fin.*)

QUESTION 602;

SOLUTION DE M. CHARLES DE TRANQUELLÉON.

Soient A le point attiré et MN le plan attirant; abaissons du point A une perpendiculaire sur le plan. Soit P le pied de cette perpendiculaire. Du point P comme centre décrivons des cercles; considérons comme élément d'attraction la couronne infiniment petite comprise entre deux cercles décrits avec des rayons : r, $r + dr$. En posant $AP = a$, l'attraction de l'élément sera $\frac{2\mu\pi r dr}{\sqrt{(a^2+r^2)^2}}$, la composante de cette attraction suivant AP sera $\frac{2\mu a\pi r dr}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$; donc l'attraction totale sera $\int_0^\infty \frac{2\mu a\pi r dr}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu\pi}{a}$, ce qui démontre le théorème.

Ce résultat peut être généralisé. En effet, si l'on suppose que l'attraction de l'élément soit en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance, l'attraction totale sera

$$\int_0^\infty \frac{2\mu a\pi r dr}{(a^2+r^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{2}{n-1}\frac{\mu\pi}{a^{n-2}}.$$

Pour $n = 1$ cette formule donne pour l'attraction une valeur infinie.

Mais dans ce cas l'attraction est

$$\mu a\pi \int_0^\infty \frac{2 r dr}{a^2+r^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{2 r dr}{a^2+r^2} = \mathrm{L}(a^2+r^2).$$

Or, pour $r = \infty$ le logarithme est infini.

On peut donc dire, en général, sauf le cas de $n = 1$, que lorsque tous les points d'un plan attirent, en raison inverse de la $n^{ième}$ puissance de la distance, un point situé en dehors du plan, l'attraction totale du plan sur ce point est en raison inverse de la $(n-2)^{ième}$ puissance de la distance du point au plan.

Note. — M. Ch. Kessler a résolu la question 602 d'une manière semblable, et il a de même remarqué que la proposition peut être généralisée.

NOTE

Sur le lieu du sommet d'un angle dont les côtés sont respectivement tangents à deux coniques ayant un foyer commun, les rayons menés de ce foyer aux deux points de contact faisant un angle constant donné;

Par M. CAQUÉ,
Professeur au collége Rollin.

Les équations de deux coniques ayant un foyer commun sont en coordonnées rectangulaires; et, quand on prend ce foyer pour origine,

$$(1)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = (lx + my + p)^2, \\ x'^2 + y'^2 = (l'x' + m'y' + p')^2. \end{cases}$$

Si l'on mène deux tangentes, l'une à la première conique et par le point (xy), l'autre à la seconde conique et par le point $(x'y')$, les coordonnées X et Y du point de concours de ces tangentes satisferont aux équations

$$(2)\quad \begin{cases} Xx + Yy = (lX + mY + p)(lx + my + p) \\ Xx' + Yy' = (l'X + m'Y + p')(l'x' + m'y' + p') \end{cases}$$

Pour trouver l'équation du lieu décrit par le sommet d'un angle dont les côtés sont respectivement tangents à deux coniques ayant un foyer commun, lorsque les rayons vecteurs menés de ce foyer aux deux points de contact font un angle constant, il faudrait éliminer x, y, x', y' entre (1) et (2) et l'équation exprimant que l'angle des rayons vecteurs est constant.

Pour faciliter cette élimination, soient r, r' et R les rayons vecteurs des points (x, y), (x', y'), (X, Y); α, α', 6, les angles que ces rayons vecteurs font avec l'axe des x, et soit 2θ l'angle constant que font entre eux r et r'.

Posons enfin, pour abréger,

$$d = lx + my + p, \qquad d' = l'x' + m'y' + p',$$
$$D = lX + mY + p, \qquad D' = l'X + m'Y + p'.$$

Les équations (1) deviendront

$$(3) \qquad r^2 = d^2, \quad r'^2 = d'^2.$$

Les équations (2) deviendront, en ayant égard à (3),

$$(4) \qquad R\cos(6 - \alpha) = D, \quad R\cos(6 - \alpha') = D',$$

et l'on aura la condition

$$(5) \qquad \alpha' - \alpha = 2\theta.$$

Les équations (4) combinées par addition et par soustraction donnent, en ayant égard à (5),

$$R\cos\left(6 - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) = \frac{D + D'}{2\cos\theta},$$
$$R\sin\left(6 - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right) = \frac{D' - D}{2\sin\theta};$$

d'où l'on déduit

$$(6) \qquad R^2 = \left(\frac{D' + D}{2\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{D' - D}{2\sin\theta}\right)^2,$$

ou, après réduction,

$$(7) \qquad R^2 \sin^2 2\theta = D^2 + D'^2 - 2DD' \cos 2\theta.$$

Les coordonnées des points communs à cette conique et l'une des coniques (3), la première par exemple, satisfont à l'équation

$$D \cos 2\theta - D' = 0,$$

représentant une droite passant au point de concours des directrices des coniques données.

Le lieu cherché est donc la conique doublement tangente à chacune des coniques données, et telle, que chaque corde qui lui est commune avec chacune d'elles passe au point de concours de leurs directrices.

Pour répondre à la question posée au Concours général, il suffit d'exprimer que les coniques données sont semblables, c'est-à-dire ont la même excentricité e, et que l'angle de leurs rayons minima, ou l'angle de leurs directrices, est 2θ.

A cet effet on prendra l'axe des x, dont la direction est restée arbitraire, parallèle à la bissectrice de l'angle des directrices des coniques données, et l'on posera dans l'équation (6)

$$D = e(X \cos\theta + Y \sin\theta - q),$$
$$D' = e(X \cos\theta - Y \sin\theta - q').$$

On trouvera

$$(8) \qquad R^2 = e^2 \left[\left(X - \frac{q + q'}{2\cos\theta}\right)^2 + \left(Y - \frac{q - q'}{2\sin\theta}\right)^2 \right].$$

Le point de concours des directrices

$$D = 0, \quad D' = 0$$

a pour abscisse et pour ordonnée

$$\frac{q + q'}{2 \cos \theta} \quad \text{et} \quad \frac{q - q'}{2 \sin \theta}.$$

L'équation (8) exprime donc que le lieu demandé est celui des points dont les distances au foyer commun et à l'intersection des directrices sont dans un rapport constant, égal à l'excentricité commune des coniques; ce lieu est donc un cercle en général, et une droite si les coniques sont deux paraboles.

On remarquera que le lieu ne changerait ni de grandeur ni de position, si l'on faisait varier les coniques données, en conservant toutefois leur excentricité commune, leur foyer commun et le point de concours de leurs directrices.

ARITHMOLOGIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR V.-A. LE BESGUE.

TROISIÈME ARTICLE.

11. Dans les calculs suivants, $\varphi(x)$ étant une fonction de x, en ce sens qu'elle en dépend d'une manière quelconque, connue ou inconnue, on représentera par $\varphi_0(x)$ une quantité $< \varphi(x)$, et par $\varphi_1(x)$ une quantité $> \varphi(x)$. Les quantités $\varphi_1(x)$, $\varphi_0(x)$ seront nommées des limites supérieure et inférieure de $\varphi(x)$, mais sans attacher au mot *limite* sa véritable signification. On emploiera les

inégalités évidentes

$$\varphi_1(x).\theta_1(x) > \varphi(x).\theta(x) > \varphi_0(x).\theta_0(x),$$
$$\varphi_1(x) - \theta_0(x) > \varphi(x) - \theta(x) > \varphi_0(x) - \theta_1(x),$$

et quelques autres qu'il serait inutile d'inscrire ici.

Pour avoir deux limites simples de la somme des logarithmes des nombres consécutifs 1, 2, 3,..., x, c'est-à-dire $\log \Pi x$ ou $\Sigma \log x$, il faut prendre l'inégalité déjà citée

$$\left(\frac{x}{2}\right)^x > \Pi x > \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

où l'on suppose $x > 5$ et e égal à la base du système des logarithmes népériens.

Si l'on prend les logarithmes pour une base quelconque, par exemple pour la base 10, on aura

$$x(\log x - \log 2) > \Sigma \log x > x(\log x - \log e).$$

Dans les calculs suivants, on aura à considérer la somme $\Sigma \log E(x)$, où $E(x)$ est l'entier d'une quantité fractionnaire x; l'inégalité

$$E(x)[\log E(x) - \log 2] > \Sigma \log E(x) > E(x)[\log E(x) - \log e]$$

devra être exprimée en fonction de x.

En augmentant le premier membre ou la limite supérieure, on lui donnera la forme

$$x(\log x - \log 2).$$

En diminuant la limite inférieure, on lui donnera la forme

$$(x - 1)[\log(x - 1) - \log e).$$

Si l'on met $(x - 1)\log(x - 1)$ sous la forme

$$(x - 1)\left[\log x + \log\left(\frac{x-1}{x}\right)\right],$$

on aura

$$(x-1)[\log(x-1)-\log e]$$
$$=x(\log x-\log e)-\log x+\log e+(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Or il est facile de montrer que la quantité négative

$$(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)=(x-1)\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

n'atteint pas $\log e$ en valeur absolue.

$$-\log\left(1-\frac{1}{x}\right)=\log e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\ldots\right)$$
$$<\log e\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\ldots\right)<\frac{\log e}{x-1};$$

de là

$$-(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)<\log e.$$

On aurait pu faire

$$-(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)=(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right)$$
$$=(x-1)\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$$
$$=\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1},$$

quantité qui, pour x tendant vers l'infini, tend vers $\log e$.

On admettra donc, dans tous les cas, l'inégalité

$$(f)\quad x(\log x-\log 2)>\Sigma\log E(x)>x(\log x-\log e)-\log x.$$

12. Connaissant deux limites du logarithme de $\Pi(x)$,

on peut en trouver deux du logarithme de

$$\Pi_1(x) = \frac{\Pi(x).\Pi\left(\frac{x}{30}\right)}{\Pi\left(\frac{x}{2}\right).\Pi\left(\frac{x}{3}\right).\Pi\left(\frac{x}{5}\right)},$$

où c'est pour abréger que l'on n'a pas mis $E\left(\frac{x}{30}\right)$, $E\left(\frac{x}{2}\right)\ldots$, au lieu de $\frac{x}{30}$, $\frac{x}{2}$, etc.

On a donc

$$\log\Pi_1(x) = \Sigma\log x + \Sigma\log E\left(\frac{x}{30}\right)$$
$$-\left[\Sigma\log E\left(\frac{x}{2}\right) + \Sigma\log E\left(\frac{x}{3}\right) + \Sigma\log E\left(\frac{x}{5}\right)\right].$$

Admettant le cas le plus général où x n'est pas entier, et posant

$$\log\Pi_1(x) = \varphi(x) - \theta(x),$$

il viendra

$$\varphi_1(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log 2) - x\log\sqrt[30]{30},$$

$$\theta_1(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log 2) - x\log\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[5]{5},$$

et de même

$$\varphi_0(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log e) - x\log\sqrt[30]{30} - 2\log x - \log 30,$$

$$\theta_0(x) = \frac{31}{30}x(\log x - \log e) - x\log\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5} - 3\log x + \log 30,$$

ou encore

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) - \frac{31}{30}x(\log e - \log 2) - 2\log x + \log 30,$$

$$\theta_0(x) = \theta_1(x) - \frac{31}{30}x(\log e - \log 2) - 3\log x + \log 30.$$

Substituant dans

$$\varphi_1(x) - \theta_0(x) > \log \Pi_1(x) > \varphi_0(x) - \theta_1(x),$$

il vient

$$\varphi_1(x) - \theta_1(x) + \frac{31}{30} x \log\left(\frac{e}{2}\right) + 3\log x - \log 30 > \log \Pi_1(x)$$

$$> \varphi_1(x) - \theta_1(x) - \frac{31}{30} x \log\left(\frac{e}{2}\right) - 2\log x + \log 30,$$

et comme l'on a

$$\varphi_1(x) - \theta_1(x) = x \log \frac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}},$$

en posant

$$a = \log \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}} + \frac{31}{30} \log\left(\frac{e}{2}\right) = 0,5374,$$

$$a' = \log \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}} - \frac{31}{30} \log\left(\frac{e}{2}\right) = 0,2624,$$

il vient

$$(g) \qquad ax + 3\log x > \log \Pi_1(x) > a'x - 2\log x,$$

en augmentant la limite supérieure de $\log 30$ et diminuant l'inférieure de $\log 30$.

13. Au moyen des limites précédentes de $\Pi_1(x)$, on peut trouver celles de

$$P_1(x) = P(x).P(\sqrt{x}).P(\sqrt[3]{x})\ldots$$

D'après le théorème du n° 9 on a

$$\Pi_1(x).\Pi_1\left(\frac{x}{6}\right).\Pi_1\left(\frac{x}{6^2}\right)\ldots \Pi_1\left(\frac{x}{6^\gamma}\right) > P_1(x) > \Pi_1(x);$$

passant aux logarithmes, le premier membre devient

$$a\left(x + \frac{x}{6} + \frac{x}{6^2} + \ldots \frac{x}{6^\gamma}\right) + 3\left(\log x + \log\frac{x}{6} + \ldots + \log\frac{x}{6^\gamma}\right),$$

en supposant $x = \lambda 6^y$, y entier et $\lambda < 6$, d'où l'on tire

$$y \log 6 = \log x - \log \lambda, \quad 1 + y = 1 + \frac{\log x - \log \lambda}{\log 6},$$

on voit que la partie

$$a\left(x + \frac{x}{6} + \ldots + \frac{x}{6^y}\right) = ax\left(\frac{1 - \frac{1}{6^{y+1}}}{1 - \frac{1}{6}}\right)$$

$$= \frac{6}{5} ax\left(1 - \frac{\lambda}{6x}\right) = \frac{6a}{5}\left(x - \frac{\lambda}{6}\right),$$

on la remplacera par $\frac{6a}{5}x$, en l'augmentant.

La partie

$$3\left(\log x + \log\frac{x}{6} + \log\frac{x}{6^2} + \ldots + \log\frac{x}{6^y}\right)$$

$$= 3(y+1)\left(\log x - \frac{y \log 6}{2}\right)$$

$$= 3\left(1 + \frac{\log x - \log\lambda}{\log 6}\right)\left(\frac{\log x + \log\lambda}{2}\right)$$

$$= \frac{3\log^2 x}{2\log 6} + \frac{3}{2}\log x - \frac{3\log^2\lambda}{2\log 6} + \frac{3}{2}\log\lambda.$$

Comme $\log 6 = 0{,}47712$, on peut, en augmentant cette partie, la réduire à

$$\frac{3}{2\log 6}\log^2 x + \frac{3}{2}\log x + 1{,}2.$$

On aura donc l'inégalité

$$(h)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{6a}{5}x + \frac{3}{2\log 6}\log^2 x + \frac{3}{2}\log x + 1{,}2 > \log P_1(x) \\ > a'x - 2\log x. \end{array}\right.$$

14. Enfin, pour avoir les limites de $\log P(x)$ ou de la somme des nombres premiers non supérieurs à x, il faut employer l'inégalité

$$\frac{P_1(x)}{P_1(\sqrt{x})} > P(x) > \frac{P_1(x)}{[P_1(\sqrt{x})]^2},$$

en prendre les logarithmes, remplacer le premier membre par une quantité plus grande, le dernier par une quantité plus petite; les inégalités (h) conduisent ainsi à cette autre

$$\frac{6a}{5}x + \frac{3}{2\log 6}\log^2 x + \frac{3}{2}\log x + 1,2 - a'\sqrt{x} + \log x$$

$$> \log P(x) > a'x - 2\log x - \frac{12a}{5}\sqrt{x} - \frac{3}{4}\frac{\log^2 x}{\log 6}$$

$$- \frac{3}{2}\log x - 2,4,$$

ou bien, en réduisant,

$$(i) \left\{ \begin{aligned} &\frac{6ax}{5} - a'\sqrt{x} + \frac{3}{2\log 6}\log^2 x + \frac{5}{x}\log x + 1,2 > \log P(x), \\ &\log P(x) > a'x - \frac{12a}{5}\sqrt{x} \\ &\qquad\qquad - \frac{3}{4}\frac{\log^2 x}{\log 6} - \frac{7}{2}\log x - 2,4. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de ces limites de $\log P(x) = \varphi(x)$, l'inégalité

$$\varphi_0(mx) - \varphi_1(x) > K(\log x + \log m),$$

qui exprime, quand elle est satisfaite, qu'il y a plus de

K nombres premiers entre x et mx, devient

$$(e')\left\{\begin{array}{l}\left(a'm-\frac{6}{5}a\right)x-\left(\frac{12\sqrt{m}}{5}a-a'\right)\sqrt{x}-\frac{9}{4}\frac{\log^2 x}{\log 6}\\-\left(\frac{3\log m}{3\log 6}+6\right)\log x-\left(\frac{3\log^2 m}{4\log 6}+\frac{7}{2}\log m+3,6\right)\\>\mathrm{K}\log x+\mathrm{K}\log m.\end{array}\right.$$

Cette inégalité ne peut être satisfaite que pour

$$m>\frac{6}{5}\frac{a}{a'}>2,459 \quad \text{ou} \quad m>2,46.$$

Si on la met sous la forme

$$x-\mathrm{A}\sqrt{x}>\mathrm{B}\log^2 x+\mathrm{C}\log x+\mathrm{D},$$

où A, B, C, D sont positifs, on trouvera bientôt, pour une valeur donnée de $m>2,46$, qu'au-dessus d'une certaine valeur de x il y aura plus de K nombres premiers entre x et mx.

15. En partant de la formule de M. Liouville :

$$\Sigma\log x=\sqrt{2\pi}+x\log x-x+\frac{1}{2}\log x+\frac{\mu}{12x},$$

μ étant compris entre 0 et 1, M. Tchebichew a trouvé pour limites de la somme des logarithmes non supérieurs à x les expressions

$$\frac{6\mathrm{A}}{5}x-\mathrm{A}\sqrt{x}+\frac{5}{4\log 6}\log^2 x+\frac{5}{2}\log x+2,$$

$$\mathrm{A}x-\frac{12}{5}\mathrm{A}\sqrt{x}-\frac{5}{8\log 6}\log^2 x-\frac{15}{4}\log x-3,$$

en supposant les logarithmes népériens et

$$\mathrm{A}=\log\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}\sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}};$$

de là l'inégalité

$$\mathrm{A}\left(m-\frac{6}{5}\right)x-\left(\frac{12\sqrt{m}}{5}-1\right)\mathrm{A}\sqrt{x}>\frac{15}{8\log 6}\log^2 x$$
$$+\left(\frac{5\log m}{4\log 6}+\frac{25}{4}+\mathrm{K}\right)\log x$$
$$+\left[\frac{5\log^2 m}{8\log 6}+\left(\frac{15}{4}+\mathrm{K}\right)\log m+5\right]>0.$$

Cette inégalité n'apprend rien quand on n'a pas $m>\frac{6}{5}$; mais quand $m>\frac{6}{5}$, en prenant x suffisamment grand on fait tomber entre x et mx autant de nombres premiers qu'on voudra. Ainsi pour $m=2$, au delà de $x=169=13^2$, il y a plus de quatre nombres premiers entre x et $2x$. Cette limite de x est beaucoup trop grande; la table de Burckhardt fait voir que $x=22$ suffit. Il est à désirer que le problème soit repris et résolu pour de moindres valeurs de m, en employant, s'il est possible, une fonction autre que $\Sigma\log x$.

MÉMOIRE SUR LES TÉTRAÈDRES.

Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données

(voir p. 353);

PAR M. PAINVIN.

Présenté à l'Académie en janvier 1862.

30. Du groupe (III) on déduit, eu égard aux relations (7),

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda^2 = r_1^2 r_2^2 r_3^2 - \sqrt{\theta}(\theta + c), \\ \lambda = r_1 \rho_1 d_1 = r_2 \rho_2 d_2 = r_3 \rho_3 d_3, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME VIII. — *Le produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance est constant et égal à six fois le volume.*

Le groupe (V) nous donne enfin :

$$(14)\quad \begin{cases} f_2 + f_3 + 2\theta - 2r_1^2\sqrt{\theta} = \dfrac{\lambda^2}{d_1^2} = r_1^2 \rho_1^2, \\ f_3 + f_1 + 2\theta - 2r_2^2\sqrt{\theta} = \dfrac{\lambda^2}{d_2^2} = r_2^2 \rho_2^2, \\ f_1 + f_2 + 2\theta - 2r_3^2\sqrt{\theta} = \dfrac{\lambda^2}{d_3^2} = r_3^2 \rho_3^2, \end{cases}$$

d'où l'on conclut, en vertu de l'équation (3),

$$(15)\quad r_1^2 \rho_1^2 + r_2^2 \rho_2^2 + r_3^2 \rho_3^2 = f + f_1 + f_2 + f_3,$$

c'est-à-dire :

THÉORÈME IX. — *La somme des carrés des produits des arêtes opposées est égale à quatre fois la somme des carrés des aires des faces.*

31. En combinant les relations du groupe (VIII) et en faisant intervenir les égalités (4), (8) et (9), on arrive à :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &2\rho_1^2(R^2-R_1^2)=f_1-f,\\ &2\rho_2^2(R^2-R_2^2)=f_2-f,\\ &2\rho_3^2(R^2-R_3^2)=f_3-f,\\ &2r_1^2(R_2^2-R_3^2)=f_3-f_2,\\ &2r_2^2(R_3^2-R_1^2)=f_1-f_3,\\ &2r_3^2(R_1^2-R_2^2)=f_2-f_1,\end{aligned}\right.$$

d'où :

THÉORÈME X. — *Le produit du carré d'une arête par la différence des carrés des distances du centre de gravité aux sommets opposés à cette arête est égal au double de la différence des carrés des faces adjacentes à cette arête.*

Combinant les relations (16) et (9), on trouve encore :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &2(R_2^2-R_3^2)=r_2^2-r_3^2, && 2(R^2-R_1^2)=r_2^2-\rho_3^2=r_3^2-\rho_2^2,\\ &2(R_3^2-R_1^2)=r_3^2-r_1^2, && 2(R^2-R_2^2)=r_3^2-\rho_1^2=r_1^2-\rho_3^2,\\ &2(R_1^2-R_2^2)=r_1^2-r_2^2, && 2(R^2-R_3^2)=r_1^2-\rho_3^2=r_2^2-\rho_1^2,\end{aligned}\right.$$

égalités qu'il est facile de traduire en langage ordinaire.

32. Les angles $\widehat{A_i A_k}$ sont les suppléments des dièdres formés par les faces du tétraèdre auxquelles les droites A_i et A_k sont normales.

Or la comparaison des formules (3) et (6) nous donne

immédiatement :

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
-\cos(A_2A_3) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(r_1r_2)\operatorname{tang}(r_1\rho_2)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(r_1r_3)\operatorname{tang}(r_1\rho_3)},\\
-\cos(A_1A_3) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(r_2r_3)\operatorname{tang}(r_2\rho_3)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(r_2r_1)\operatorname{tang}(r_2\rho_1)},\\
-\cos(A_1A_2) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(r_3r_1)\operatorname{tang}(r_3\rho_1)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(r_3r_2)\operatorname{tang}(r_3\rho_2)}.
\end{aligned}\right.
$$

De plus, les formules (17) du § II et les valeurs (3) de ce paragraphe nous fourniront les $\widehat{AA_k}$ sous la forme suivante :

$$
(19)\left\{
\begin{aligned}
-\sqrt{ff_1}\cos(AA_1) &= (r_2^2-\sqrt{\theta})(r_3^2-\sqrt{\theta}),\\
-\sqrt{ff_2}\cos(AA_2) &= (r_3^2-\sqrt{\theta})(r_1^2-\sqrt{\theta}),\\
-\sqrt{ff_3}\cos(AA_3) &= (r_1^2-\sqrt{\theta})(r_2^2-\sqrt{\theta}),
\end{aligned}\right.
$$

d'où on conclut, en ayant égard aux valeurs (6),

$$
(20)\left\{
\begin{aligned}
-\cos(AA_1) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_1r_2)\operatorname{tang}(\rho_1\rho_2)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_1r_3)\operatorname{tang}(\rho_1\rho_3)},\\
-\cos(AA_2) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_2r_3)\operatorname{tang}(\rho_2\rho_3)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_2r_1)\operatorname{tang}(\rho_2\rho_1)},\\
-\cos(AA_3) &= \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_3r_1)\operatorname{tang}(\rho_3\rho_1)} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\rho_3r_2)\operatorname{tang}(\rho_3\rho_2)}.
\end{aligned}\right.
$$

Les relations (18) et (20) donnent encore lieu à plusieurs énoncés géométriques.

A l'aide des valeurs (3), (13) et (19), on arrive immédiatement aux relations suivantes :

$$
(21)\left\{
\begin{aligned}
\left\{\begin{matrix}\cos(AA_1)\cos(A_2A_3)\\ \cos(AA_2)\cos(A_3A_1)\\ \cos(AA_3)\cos(A_1A_2)\end{matrix}\right\} &= \frac{\sqrt{\theta}(r_1^2-\sqrt{\theta})(r_2^2-\sqrt{\theta})(r_3^2-\sqrt{\theta})}{\sqrt{ff_1f_2f_3}}\\
&= \frac{\sqrt{\theta}(\lambda^2-f\sqrt{\theta})}{\sqrt{ff_1f_2f_3}},
\end{aligned}\right.
$$

propriété remarquable énoncée par le théorème suivant :

Théorème XI. — *Le produit des cosinus des dièdres opposés est constant.*

Les formules (21) et (3) nous conduisent encore à une propriété des dièdres adjacents à une même face; car on trouve :

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Sommet O}\ldots & \left|\begin{array}{c} \dfrac{\cos(A_1A_2)\cos(A_1A_3)}{\cos(AA_1)} \\ \dfrac{\cos(A_2A_3)\cos(A_2A_1)}{\cos(AA_2)} \\ \dfrac{\cos(A_3A_1)\cos(A_3A_2)}{\cos(AA_3)} \end{array}\right\} = \dfrac{\theta\sqrt{f}}{\sqrt{f_1 f_2 f_3}}, \\ \text{Sommet } M_1\ldots & \left|\begin{array}{c} \dfrac{\cos(AA_2)\cos(AA_3)}{\cos(AA_1)} \\ \dfrac{\cos(A_2A_3)\cos(A_2A)}{\cos(A_2A_1)} \\ \dfrac{\cos(A_3A)\cos(A_3A_2)}{\cos(A_3A_1)} \end{array}\right\} = \dfrac{(r_1^2-\sqrt{\theta})^2\sqrt{f_1}}{\sqrt{f f_2 f_3}}. \end{array}\right.$$

. . . .

Je crois inutile de transcrire les relations similaires correspondant aux sommets M_2, M_3 ; elles s'obtiendront d'ailleurs par une simple permutation d'indices.

Le groupe (II *bis*) nous donne des relations entre les dièdres d'un même sommet.

33. Je n'ai cité que les plus saillantes parmi les propriétés que présente le tétraèdre maximum; mais les formules que je viens de relater offrent un grand nombre de combinaisons pouvant conduire à des relations plus ou moins simples entre les éléments de ce tétraèdre.

Cependant, avant de terminer ce Mémoire, je dirai quelques mots d'un tétraèdre dérivant du tétraèdre

$OM_1M_2M_3$ par une construction que j'exposerai tout à l'heure ; ce tétraèdre, qui, je crois, n'a pas été considéré jusqu'ici, présente des relations fort curieuses avec le tétraèdre primitif ; il me semble donc intéressant d'entrer dans quelques détails sur ce sujet, et d'y consacrer un dernier paragraphe.

§ V. — *Propriétés du* TÉTRAÈDRE DÉRIVÉ. *Autre problème de maximum.*

34. Par un point quelconque de l'espace (je choisirai le point O pour plus de clarté) élevons des perpendiculaires A_1, A_2, A_3 aux faces OM_2M_3, OM_1M_3, OM_1M_2, du côté du sommet opposé à chaque face ; puis une perpendiculaire A à la face $M_1M_2M_3$ qu'on prolongera du côté opposé à cette face ; prenons ensuite sur chacune de ces perpendiculaires, à partir du point O, des longueurs proportionnelles au double de l'aire de la face qui lui est normale. Ainsi nous prendrons

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} Om = \dfrac{2s}{\mu} = \dfrac{\sqrt{f}}{\mu}, & \text{suivant A,} \\ Om_1 = \dfrac{2s_1}{\mu} = \dfrac{\sqrt{f_1}}{\mu}, & \text{suivant } A_1, \\ Om_2 = \dfrac{2s_2}{\mu} = \dfrac{\sqrt{f_2}}{\mu}, & \text{suivant } A_2, \\ Om_3 = \dfrac{2s_3}{\mu} = \dfrac{\sqrt{f_3}}{\mu}, & \text{suivant } A_3, \end{array}\right.$$

nous formerons ainsi un tétraèdre $mm_1m_2m_3$ que j'appellerai le *tétraèdre dérivé des aires* du tétraèdre primitif.

Calculons d'abord les coordonnées des sommets du tétraèdre que nous venons de définir.

35. Soient ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées du sommet m_i ($i = 1, 2, 3$). On a d'abord

$$\xi_i = \mathrm{O}m_i \cos(\mathrm{A}_i x) = \frac{\sqrt{f_i}}{\mu} \cos(\mathrm{A}_i x).$$

Or, d'après les formules (12) du § II, nous avons

$$\mathrm{X}_i = \sqrt{f_i} \cos(\mathrm{A}_i x);$$

les coordonnées des trois sommets m_1, m_2, m_3 seront donc

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi_i = \dfrac{\mathrm{X}_i}{\mu}, \\ \eta_i = \dfrac{\mathrm{Y}_i}{\mu}, \\ \zeta_i = \dfrac{\mathrm{Z}_i}{\mu}. \end{cases}$$

Pour le sommet m, on a (ξ, η, ζ étant ses coordonnées)

$$\xi = \mathrm{O}m \cos(\mathrm{A}x) = \frac{\sqrt{f}}{\mu} \cos(\mathrm{A}x);$$

les formules (15) du § II nous donnent d'ailleurs

$$-(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3) = \sqrt{f} \cos(\mathrm{A}x);$$

par suite, si l'on pose

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = -(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3), \\ \mathrm{Y} = -(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \mathrm{Y}_3), \\ \mathrm{Z} = -(\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_3). \end{cases}$$

on trouve

$$(4)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{X}{\mu}, \\ \eta = \dfrac{Y}{\mu}, \\ \zeta = \dfrac{Z}{\mu}. \end{cases}$$

Je remarque qu'il résulte immédiatement des formules (2), (3), (4) que *le centre de gravité de ce tétraèdre est au point O par lequel on mène les normales.*

36. Représentons par λ' le sextuple du volume du tétraèdre $m m_1 m_2 m_3$, on a :

$$(5)\quad \lambda' = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{X}{\mu} & \dfrac{Y}{\mu} & \dfrac{Z}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{X_1}{\mu} & \dfrac{Y_1}{\mu} & \dfrac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_2}{\mu} & \dfrac{Y_2}{\mu} & \dfrac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \dfrac{X_3}{\mu} & \dfrac{Y_3}{\mu} & \dfrac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{4}{\mu^3} L = \frac{4}{\mu^3} \lambda^2.$$

Ainsi :

Théorème I. — *Le volume du tétraèdre dérivé est égal, à un facteur numérique près, au carré du volume du tétraèdre primitif.*

Remarque. — Nous avons introduit la ligne μ afin de laisser les formules homogènes. Dans les énoncés suivants, nous supposerons toujours, sauf avis contraire, cette constante égale à l'unité.

« Si l'on suppose, en particulier,

$$\mu = \sqrt[3]{\lambda}, \quad \text{ou} \quad \mu = \sqrt[3]{\lambda^2},$$

» on trouve que :

» Dans le premier cas, le volume du tétraèdre dérivé » est égal à quatre fois le volume du tétraèdre primitif;

» Dans le second cas, le volume du tétraèdre dérivé » est toujours égal à $\frac{2}{3}$. »

37. Nous poserons, pour faciliter les calculs,

$$(6)\qquad \begin{cases} \sqrt{ff_i}\cos(AA_i) = A_{0i}, \\ \sqrt{f_if_k}\cos(A_iA_k) = A_{ik}, \end{cases}$$

et les formules (17) du § II deviennent avec cette notation

$$(7)\qquad \begin{cases} A_{01} + A_{21} + A_{31} + f_1 = 0, \\ A_{02} + A_{12} + A_{32} + f_2 = 0, \\ A_{03} + A_{13} + A_{23} + f_3 = 0, \\ A_{01} + A_{02} + A_{03} + f = 0, \\ A_{12} + A_{13} + A_{23} = \dfrac{f - f_1 - f_2 - f_3}{2} = -c. \end{cases}$$

Déterminons les arêtes du tétraèdre dérivé; posant

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha_{oi} = \overline{mm_i}^2, \\ \alpha_{ik} = \overline{m_im_k}^2; \end{cases}$$

on trouve, en ayant égard aux valeurs (2), (3), (4), (6) et aux formules (14) du § II :

$$(9)\qquad \begin{cases} \mu^2\alpha_{01} = (2X_1 + X_2 + X_3)^2 + (2Y_1 + Y_2 + Y_3) + (2Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 \\ \qquad = 2(f + f_1) - (f_2 + f_3) - 2A_{23}, \\ \mu^2\alpha_{02} = (X_1 + 2X_3 + X_3)^2 + (Y_1 + 2Y_2 + Y_3) + (Z_1 + 2Z_2 + Z_3)^2 \\ \qquad = 2(f + f_2) - (f_3 + f_1) - 2A_{13}, \\ \mu^2\alpha_{03} = (X_1 + X_2 + 2X_3)^2 + (Y_1 + Y_2 + 2Y_3)^2 + (Z_1 + Z_2 + 2Z_3)^2 \\ \qquad = 2(f + f_3) - (f_1 + f_2) - 2A_{12}; \end{cases}$$

$$
(10)\left\{
\begin{aligned}
\mu^2\alpha_{23} &= (X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + (Z_2 - Z_3)^2 = f_2 + f_3 - 2 \ldots\\
\mu^2\alpha_{13} &= (X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2 + (Z_3 - Z_1)^2 = f_3 + f_1 - 2 \ldots\\
\mu^2\alpha_{12} &= (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 = f_1 + f_2 - 2 \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

De ces relations on conclut

$$
(11)\left\{
\begin{aligned}
\alpha_{01} - \alpha_{23} &= \frac{2}{\mu^2}(f + f_1 - f_2 - f_3),\\
\alpha_{02} - \alpha_{13} &= \frac{2}{\mu^2}(f + f_2 - f_1 - f_3),\\
\alpha_{03} - \alpha_{12} &= \frac{2}{\mu^2}(f + f_3 - f_1 - f_2),
\end{aligned}
\right.
$$

puis

$$
(12)\left\{
\begin{aligned}
\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23} &= \frac{1}{\mu^2}[3(f_1 + f_2 + f_3) - f],\\
\alpha_{02} + \alpha_{03} + \alpha_{23} &= \frac{1}{\mu^2}[3(f + f_2 + f_3) - f_1],\\
\alpha_{03} + \alpha_{01} + \alpha_{13} &= \frac{1}{\mu^2}[3(f + f_1 + f_3) - f_2],\\
\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{12} &= \frac{1}{\mu^2}[3(f + f_1 + f_2) - f_3],\\
\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{23} &= \frac{4}{\mu^2}(f + f_1 + f_2 + f_3);
\end{aligned}
\right.
$$

et enfin

$$
(13)\left\{
\begin{aligned}
\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03} &= \frac{1}{\mu^2}(f + f_1 + f_2 + f_3 + 4f),\\
\alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{13} &= \frac{1}{\mu^2}(f + f_1 + f_2 + f_3 + 4f_1),\\
\alpha_{20} + \alpha_{21} + \alpha_{23} &= \frac{1}{\mu^2}(f + f_1 + f_2 + f_3 + 4f_2),\\
\alpha_{30} + \alpha_{31} + \alpha_{32} &= \frac{1}{\mu^2}(f + f_1 + f_2 + f_3 + 4f_3),
\end{aligned}
\right.
$$

relations que nous traduirons par les énoncés suivants :

Théorème II. — *La différence des carrés des arêtes opposées est égale à quatre fois l'excès de la somme des carrés des faces primitives respectivement perpendiculaires aux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de la première arête sur celle des aires correspondant à la seconde arête.*

Théorème III. — *La somme des carrés des arêtes d'une même face est égale à douze fois la somme des carrés des faces primitives perpendiculaires aux rayons vecteurs de la face, moins quatre fois le carré de la face restante.*

Théorème IV. — *La somme des carrés des arêtes correspondant à un même sommet est égale à quatre fois la somme des carrés des aires primitives, plus seize fois le carré de la face homologue de celle qui est opposée au sommet considéré.*

N. B. — J'appellerai *faces homologues* les faces $m_1 m_2 m_3$ et $M_1 M_2 M_3$, $m m_1 m_2$ et $OM_1 M_2$, $m m_1 m_3$ et $OM_1 M_3$, $m m_2 m_3$ et $OM_2 m_3$.

Je désignerai sous le nom de *faces conjuguées de l'arête* $m_i m_k$ ou α_{ik} les faces $\sqrt{f_i}$, $\sqrt{f_k}$.

38. Déterminons les aires des faces du tétraèdre dérivé.

Nous représenterons par

$\mathcal{A}$ l'axe, et σ l'aire de la face $m_1 m_2 m_3$,
$\mathcal{A}_1$ l'axe, et σ_1 l'aire de la face $m m_2 m_3$,
$\mathcal{A}_2$ l'axe, et σ_2 l'aire de la face $m m_1 m_3$,
$\mathcal{A}_3$ l'axe, et σ_3 l'aire de la face $m m_1 m_2$.

Afin de bien préciser les signes, nous devrons rapporter les déterminants partiels au déterminant λ' qui donne

le volume, savoir

$$(14) \qquad \lambda' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{X}{\mu} & \frac{Y}{\mu} & \frac{Z}{\mu} \\ 1 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}.$$

Les équations des faces $m_1 m_2 m_3$, $m m_2 m_3$, $m m_1 m_3$, $m m_1 m_2$ s'obtiendront en remplaçant, dans le déterminant λ', les coordonnées du sommet manquant par les coordonnées courantes x, y, z.

Nous devrons alors appliquer les formules (15) du § II; je vais les rappeler.

Si $P = 0$ est l'équation du plan d'une face s, la direction de la normale au plan, prolongée du côté opposé à cette face, est donnée par les équations

$$(15) \qquad \begin{cases} 2s\cos(Ax) = \dfrac{dP}{dx}, \\ 2s\cos(Ay) = \dfrac{dP}{dy}, \\ 2s\cos(Az) = \dfrac{dP}{dz}. \end{cases}$$

39. Ceci posé, considérons la face $m_1 m_2 m_3$; son plan a pour équation

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous aurons donc pour la direction de l'axe $\mathcal{A}$:

$$2\sigma \cos(\mathcal{A}, x) = \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{\mu^2}\begin{vmatrix} 1 & Y_1 & Z_1 \\ 1 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$\mu^2 . 2\sigma \cos(\mathcal{A}, x) = -\left(\frac{dL}{dX_1} + \frac{dL}{dY_1} + \frac{dL}{dZ_1}\right);$$

ou enfin, en ayant égard aux formules (4) du § II,

$$2\sigma \cos(\mathcal{A}, x) = -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3);$$

nous arrivons ainsi à ce premier groupe

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} 2\sigma \cos(\mathcal{A}, x) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3), \\ 2\sigma \cos(\mathcal{A}, y) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(y_1 + y_2 + y_3), \\ 2\sigma \cos(\mathcal{A}, z) &= -\frac{\lambda}{\mu^2}(z_1 + z_2 + z_3), \end{aligned}\right.$$

les deux dernières relations s'obtenant par un calcul semblable.

Soit maintenant la face mm_2m_3; son plan a pour équation

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{X}{\mu} & \frac{Y}{\mu} & \frac{Z}{\mu} \\ 1 & x & y & z \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = 0$$

Nous aurons, pour déterminer la direction de l'axe $\mathcal{A}_1$:

$$2\sigma_1 \cos(\mathcal{A}_1 x) = \frac{dP_1}{dx} = +\frac{1}{\mu^2}\begin{vmatrix} 1 & Y & Z \\ 1 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$\mu^2 . 2\sigma_1 \cos(\mathcal{A}_1 x) = \begin{vmatrix} 3 - Y_1 - Z_1 \\ 1 & Y_2 & Z_2 \\ 1 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \left(3\frac{dL}{dX_1} - \frac{dL}{dX_2} - \frac{dL}{dX_3}\right),$$

ou enfin

$$2\sigma_1 \cos(\mathcal{A}_1 x) = -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3 - 4x_1).$$

Le calcul des autres angles se fera d'une manière semblable et sans aucune ambiguïté; de sorte que nous pouvons écrire tout de suite

$$(17)\quad \begin{cases} 2\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i x) = -\frac{\lambda}{\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3 - 4x_i), \\ 2\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i y) = -\frac{\lambda}{\mu^2}(y_1 + y_2 + y_3 - 4y_i), \\ 2\sigma_i \cos(\mathcal{A}_i z) = -\frac{\lambda}{\mu^2}(z_1 + z_2 + z_3 - 4z_i). \end{cases}$$

Si nous introduisons les coordonnées u, v, w du centre de gravité du tétraèdre primitif, savoir :

$$(18)\quad \begin{cases} u = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \\ v = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \\ w = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}, \end{cases}$$

les formules (16) et (17) prendront la forme suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} \sigma \cos(\mathcal{A}x) = -\dfrac{2}{\mu^2}\lambda u, \\ \sigma \cos(\mathcal{A}y) = -\dfrac{2}{\mu^2}\lambda v, \\ \sigma \cos(\mathcal{A}z) = -\dfrac{2}{\mu^2}\lambda w, \\ \sigma_i \cos(\mathcal{A}_i x) = -\dfrac{2}{\mu^2}\lambda (u - x_i), \\ \sigma_i \cos(\mathcal{A}_i y) = -\dfrac{2}{\mu^2}\lambda (v - y_i), \\ \sigma_i \cos(\mathcal{A}_i z) = -\dfrac{2}{\mu^2}\lambda (w - z_i). \end{cases}$$

40. Des relations (19) nous conclurons, en conservant les notations des paragraphes précédents :

$$(20)\quad \begin{cases} \sigma = \dfrac{2}{\mu^2}\lambda R, \\ \sigma_1 = \dfrac{2}{\mu^2}\lambda R_1, \\ \sigma_2 = \dfrac{2}{\mu^2}\lambda R_2, \\ \sigma_3 = \dfrac{2}{\mu^2}\lambda R_3, \end{cases}$$

et encore

$$(21)\quad \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \frac{\lambda^2}{\mu^4}(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2),$$

relations qui nous fournissent ces propriétés remarquables :

Théorème V. — *Les faces du tétraèdre dérivé sont respectivement égales à douze fois le produit du vo-*

lume primitif par la distance du centre de gravité du tétraèdre primitif au sommet opposé à la face homologue de la face considérée.

La somme des carrés des faces du tétraèdre dérivé est égale à trente-six fois le carré du volume du tétraèdre primitif multiplié par la somme des carrés de ses arêtes.

41. *Angle des arêtes opposées.*

Considérons, par exemple, les deux arêtes opposées mm_1, $m_2 m_3$; on a

$$mm_1 \cos(mm_1, x) = \frac{X - X_1}{\mu},$$

$$mm_1 \cos(mm_1, y) = \frac{Y - Y_1}{\mu},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_2 m_3 \cos(m_2 m_3, x) = \frac{X_2 - X_3}{\mu},$$

$$m_2 m_3 \cos(m_2 m_3, y) = \frac{Y_2 - Y_3}{\mu},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où

$$\mu^2 . mm_1 . m_2 m_3 \cos(mm_1, m_2 m_3)$$
$$= (X - X_1)(X_2 - X_3) + (Y - Y_1)(Y_2 - Y_3) + (Z - Z_1)(Z_2 - Z_3);$$

effectuant les multiplications et substituant aux X_i, Y_i, Z_i leurs valeurs, on obtient la première des relations du groupe suivant :

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \mu^2 . mm_1 . m_2 m_3 . \cos(mm_1, m_2 m_3) = f_3 - f_2 + 2A_{13} - 2A_{12}, \\ \mu^2 . mm_2 . m_3 m_1 . \cos(mm_2, m_3 m_1) = f_1 - f_3 + 2A_{21} - 2A_{23}, \\ \mu^2 . mm_3 . m_1 m_2 . \cos(mm_3, m_1 m_2) = f_2 - f_1 + 2A_{32} - 2A_{31}. \end{array} \right.$$

Si l'on a égard au groupe (V) du § II, nous donnerons à

ces relations la forme plus remarquable

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
mm_1 . m_2 m_3 \cos(mm_1,\ m_2 m_3) &= \frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_3^2}\right),\\
mm_2 . m_3 m_1 \cos(mm_2,\ m_3 m_1) &= \frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{d_3^2} - \frac{1}{d_1^2}\right),\\
mm_3 . m_1 m_2 \cos(mm_3,\ m_1 m_2) &= \frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

42. *Calcul des dièdres.*

Le dièdre mm_1 est le supplément de l'angle $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3$,
Le dièdre mm_2 est le supplément de l'angle $\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3$,

. . . .

Or

$$
\cos(\mathcal{A}_i \mathcal{A}_k) = \cos(\mathcal{A}_i x)\cos(\mathcal{A}_k x) + \cos(\mathcal{A}_i y)\cos(\mathcal{A}_k y) + \cos(\mathcal{A}_i z)\cos(\mathcal{A}_k z).
$$

Ayant égard aux formules (16) et (17), puis au groupe (VI) du § II, on arrive facilement aux valeurs ci-dessous :

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
4\sigma_2\sigma_3 \cos(mm_1) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4\rho_1^2),\\
4\sigma_3\sigma_1 \cos(mm_2) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4\rho_2^2),\\
4\sigma_1\sigma_2 \cos(mm_3) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - 4\rho_3^2),\\
4\sigma\sigma_1 \cos(m_2 m_3) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(-r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4r_1^2),\\
4\sigma\sigma_2 \cos(m_3 m_1) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 + \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 - 4r_2^2),\\
4\sigma\sigma_3 \cos(m_1 m_2) &= \frac{\lambda^2}{\mu^4}(\ \ r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2 - 4r_3^2).
\end{aligned}
\right.
$$

Ces relations nous donnent

$$(25)\quad \begin{cases} \sigma\sigma_1 \cos(m_2 m_3) - \sigma_2\sigma_3 \cos(mm_1) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(\rho_1^2 - r_1^2), \\ \sigma\sigma_2 \cos(m_3 m_1) - \sigma_1\sigma_3 \cos(mm_2) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(\rho_2^2 - r_2^2), \\ \sigma\sigma_3 \cos(m_1 m_2) - \sigma_1\sigma_2 \cos(mm_3) = \dfrac{\lambda^2}{\mu^4}(\rho_3^2 - r_3^2). \end{cases}$$

43. *Angle des faces homologues.*

L'angle des faces homologues est l'angle des droites $\mathcal{A}_i$, A_i. On a

$$\cos(A_i\, x) = \frac{X_i}{\sqrt{f_i}}, \qquad \cos(A_i\, y) = \frac{Y_i}{\sqrt{f_i}} \qquad \text{éq. (12), § II;}$$

$$\cos(\mathcal{A}_i\, x) = -\frac{\lambda}{2\sigma_i\mu^2}(x_1 + x_2 + x_3 - 4x_i) \qquad \text{éq. (17), § V;}$$

si l'on se rappelle que

$$x_i X_i + y_i Y_i + z_i Z_i = \lambda,$$
$$x_k X_i + y_k Y_i + z_k Z_i = 0,$$

on obtient la valeur suivante pour cos $(\mathcal{A}_i\, A_i)$

$$4 s_i \sigma_i \cos(\mathcal{A}_i\, A_i) = \frac{3\lambda^2}{\mu^2}.$$

Or, d'après l'équation (20),

$$\sigma_i = \frac{2\lambda}{\mu^2} R_i;$$

d'un autre côté, en désignant par h_i la hauteur correspondante à la face s_i dans le tétraèdre primitif, on a

$$\lambda = 2 h_i s_i.$$

On arrive donc enfin à cette propriété curieuse

$$(26) \qquad \cos(\mathcal{A}_i A_i) = \frac{3}{4} \frac{h_i}{R_i}.$$

On trouverait de la même manière

$$(26 \, bis) \qquad \cos(\mathcal{A}_i A_k) = -\frac{1}{4} \frac{h_k}{R_i},$$

c'est-à-dire :

Théorème VI. — *Le cosinus de l'angle de deux faces appartenant, l'une au tétraèdre primitif, l'autre au tétraèdre dérivé, est égal au quotient de la hauteur correspondant à la première face par la distance du centre de gravité au sommet opposé à la face homologue de la seconde, ce quotient étant multiplié par* $\frac{3}{4}$ *ou* $-\frac{1}{4}$ *suivant que les deux faces sont ou ne sont pas homologues.*

Cette propriété a lieu quelle que soit la ligne μ choisie.

44. ***Plus courte distance de deux arêtes opposées.***

Considérons les deux arêtes opposées mm_1, $m_2 m_3$; menons par l'arête $m_2 m_3$ un plan parallèle à l'arête mm_1. Soit

$$1^\circ \qquad Q + Q_1 x + Q_2 y + Q_3 z = 0$$

l'équation de ce plan; il sera parallèle à la droite mm_1, si

$$2^\circ \qquad Q_1 \frac{(X - X_1)}{\mu} + Q_2 \frac{(Y - Y_1)}{\mu} + Q_3 \frac{(Z - Z_1)}{\mu},$$

et il passera par les points m_2, m_3, si

$$3^\circ \qquad Q + Q_1 X_2 + Q_2 Y_2 + Q_3 Z_2 = 0,$$

$$4^\circ \qquad Q + Q_1 X_3 + Q_2 Y_3 + Q_3 Z_3 = 0.$$

Eliminant Q, Q_1, Q_2, Q_3 entre ces quatre équations,

on aura pour l'équation du plan cherché

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & \frac{X - X_1}{\mu} & \frac{Y - Y_1}{\mu} & \frac{Z - Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \end{vmatrix} = 0,$$

ou mieux

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = 0.$$

La plus courte distance des deux droites mm_1, $m_2 m_3$, distance que nous désignerons par D_1, sera la distance du point m_1, par exemple, à ce plan; nous aurons ainsi

$$D_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 0 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} 0 & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} \end{vmatrix}^2}$$

Or le numérateur peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{X_1}{\mu} & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{X_2}{\mu} & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{X_3}{\mu} & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{L}{\mu^3} = \frac{\lambda^2}{\mu^3}.$$

Les différents termes du dénominateur se calculent aussi facilement ; on a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{Y_1}{\mu} & \frac{Z_1}{\mu} \\ 1 & \frac{Y_2}{\mu} & \frac{Z_2}{\mu} \\ 1 & \frac{Y_3}{\mu} & \frac{Z_3}{\mu} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{dL}{dX_2} + \frac{dL}{dX_3}\right) = \frac{\lambda}{\mu^2}(x_2 + x_3) ;$$

et il viendra définitivement

$$\mu^2 D_1^2 = \frac{\lambda^2}{r_2^2 + r_3^2 + 2 r_2 r_3 \cos(r_2 r_3)}.$$

Nous obtenons donc le groupe suivant

$$(27) \quad \begin{cases} r_2^2 + r_3^2 + 2 r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) = \dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{\lambda^2}{D_1^2}, \\ r_3^2 + r_1^2 + 2 r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) = \dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{\lambda^2}{D_2^2}, \\ r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) = \dfrac{1}{\mu^2}\dfrac{\lambda^2}{D_3^2} ; \end{cases}$$

D_1, D_2, D_3 sont les plus courtes distances des arêtes opposées dans le tétraèdre dérivé.

Ces relations sont faciles à énoncer et à transformer.

45. On constate encore facilement la propriété suivante :

Théorème VII. — *Le volume du tétraèdre primitif est égal au produit de deux arêtes prises, l'une dans le tétraèdre primitif, l'autre dans le tétraèdre dérivé, par le cosinus de leur angle, ou à la moitié de ce produit, suivant que les arêtes ne sont pas ou sont homologues.*

Sont exceptés naturellement les couples d'arêtes conjuguées tels que $(OM_1, m_2 m_3)$, $(OM_2, m_3 m_1)$, $(OM_3, m_1 m_2)$, car ces arêtes sont évidemment perpendiculaires entre elles.

46. Si l'on désigne par H_i la hauteur correspondant à la face σ_i dans le tétraèdre dérivé, on a, eu égard aux relations (5), (20), (26),

$$(28)\quad H_i = \frac{\lambda'}{2\sigma_i} = \frac{2\lambda^2}{\mu^3\sigma_i} = \frac{\lambda}{\mu R_i} = \frac{2s_i h_i}{\mu R_i} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{8}{3} s_i \cos(\mathcal{A}_i A_i);$$

c'est-à-dire :

Théorème VIII. — *Les hauteurs du tétraèdre dérivé sont respectivement égales aux $\frac{8}{3}$ de la projection sur la face correspondante de l'aire de la face homologue dans le tétraèdre primitif.*

47. On peut encore se proposer de construire le tétraèdre dérivé du tétraèdre dérivé ; ce nouveau tétraèdre, que j'appellerai *sous-dérivé*, s'obtiendra par l'application de la définition (n° 34) ; et nous prendrons encore le point O pour origine des perpendiculaires.

Si $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ sont les sommets du tétraèdre sous-dérivé, nous devons prendre

$$O\mathfrak{M}_i = \frac{2\sigma_i}{\mu};$$

de sorte que les coordonnées ξ'_i, η'_i, ζ_i du sommet $\mathfrak{M}_i$ seront

$$(29)\quad \begin{cases} \xi'_i = \dfrac{2\sigma_i}{\mu}\cos(\mathcal{A}_i x), \\ \eta'_i = \dfrac{2\sigma_i}{\mu}\cos(\mathcal{A}_i y), \\ \zeta_i = \dfrac{2\sigma_i}{\mu}\cos(\mathcal{A}_i z). \end{cases}$$

En faisant usage des relations (19), on trouve alors

$$(30)\quad \begin{cases} \xi' = -\dfrac{4\lambda}{\mu^3}u, & \xi'_i = -\dfrac{4\lambda}{\mu^3}(u - x_i), \\ \eta' = -\dfrac{4\lambda}{\mu^3}v, & \eta'_i = -\dfrac{4\lambda}{\mu^3}(v - y_i), \\ \zeta' = -\dfrac{4\lambda}{\mu^3}w, & \zeta'_i = -\dfrac{4\lambda}{\mu^3}(w - z_i). \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, on vérifie facilement l'exactitude du théorème suivant :

THÉORÈME IX. — *Les arêtes du tétraèdre sous-dérivé sont respectivement parallèles et proportionnelles aux arêtes du tétraèdre primitif, et son centre de gravité est encore au point* O.

La considération du tétraèdre sous-dérivé n'apporte donc pas de nouvelles propriétés.

48. *Remarque.* — Le volume du tétraèdre dérivé $mm_1m_2m_3$ est égal, à un facteur numérique près, au carré du volume du tétraèdre primitif $OM_1M_2M_3$; il atteindra donc en même temps sa valeur maximum. Or, si l'on se reporte aux relations (11) et (12), on voit que la question résolue d'abord donne en même temps la solution du problème suivant :

Trouver le volume maximum d'un tétraèdre dont on donne la différence des carrés des arêtes opposées, ainsi que la somme des carrés des arêtes appartenant ou à un même sommet ou à une même face.

Ce tétraèdre maximum jouit de propriétés moins saillantes que celles du tétraèdre primitif. Je ne citerai que la suivante qui résulte immédiatement des relations (24), § V, et (8), § IV :

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma_2\sigma_3\cos(mm_1)+\sigma\sigma_1\cos(m_2m_3) \\ \sigma_3\sigma_1\cos(mm_2)+\sigma\sigma_2\cos(m_3m_1) \\ \sigma_1\sigma_2\cos(mm_3)+\sigma\sigma_3\cos(m_1m_2) \end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\mu^4}\left(\sqrt{\theta}+\frac{c}{\sqrt{\theta}}\right).$$

Ne voulant pas donner à ce Mémoire une trop grande étendue, je ne prolongerai pas plus loin ces recherches.

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE PURE SUR LES CUBIQUES GAUCHES

(voir p. 366) ;

PAR M. L. CREMONA,
Professeur à l'Université de Bologne.

18. Je passe à considérer l'ellipse gauche. Cette courbe admet deux plans osculateurs parallèles a, b, qui contiennent deux paraboles A, B, inscrites dans la développable osculatrice (13 et 14). Soient α, β les points de contact de ces plans avec la courbe gauche ; αx, βy les droites tangentes, en ces points, à la même courbe, et par conséquent aux paraboles A, B respectivement. Il résulte de la théorie générale que αx est parallèle aux diamètres de B, et que βy est parallèle aux diamètres de A. Deux tangentes parallèles mp, nq (p, q points de contact) de ces

paraboles déterminent un plan osculateur, et pq est la droite tangente correspondante de la cubique gauche. Tâchons de découvrir l'espèce de conique inscrite située dans ce plan.

Soient m', m'' deux points de la parabole A tels, que $m'm''$ soit parallèle à mp; nous considérons $m'm''$ comme trace, sur le plan a, d'un plan parallèle au plan (mp, nq): la trace du même plan sur b sera parallèle à nq et coupera le diamètre βx de B en un point ν qu'on construit aisément. Car, si $m'm''$ rencontre αx en u, il suffira de prendre $n\nu = mu$ sur βx (*).

Soient $n'n''$ les points de la parabole B, où elle est touchée par des droites parallèles aux tangentes de A en m', m''. La corde de contact $n'n''$ passera par un point fixe de nq. Pour construire ce point, je suppose que $m'm''$ aille à l'infini; alors $n'n''$ deviendra tangente à B en β; donc le point cherché i est l'intersection de nq par βy.

Ainsi on obtient, dans le plan b, deux faisceaux homographiques: l'un de droites parallèles à nq, l'autre de droites issues du point i. Ces faisceaux ayant le rayon nq commun, homologue à soi-même, engendrent une droite R, qu'il s'agit de déterminer.

Si le rayon du second faisceau prend la position βy, la droite $m'm''$ (et par conséquent le rayon homologue de l'autre faisceau) s'éloigne à l'infini; donc R est parallèle à βy.

Si $m'm''$ passe par α, la tangente de A en un des points m', m'', devient αx; la tangente de B, parallèle à αx, est

(*) Il y a, sur la figure qui accompagne le Mémoire de M. Cremona, deux lignes cotées xx'. L'une, désignée dans le texte par αx, est tangente à la courbe A; l'autre, désignée par βx, est parallèle à αx et par conséquent est un diamètre de la parabole B. Il y a de même deux droites y, y' qu'on ne peut confondre, puisque l'une est désignée par αy, l'autre par βy. P.

à l'infini ; donc $n'n''$ devient parallèle à βx. Le rayon correspondant du premier faisceau passera par un point c de βx, qu'on détermine en prenant $nc = m\alpha$.

Or les deux faisceaux dont il s'agit marquent sur βx deux divisions homographiques, dont n est un point double, car nq est un rayon commun. De plus, il suit de ce qui précède que c est le point de la première division qui correspond à l'infini de la seconde ; de même, β est le point de la seconde division qui correspond à l'infini de la première. Donc le deuxième point double sera o, en supposant $\beta o = nc = m\alpha$.

Ainsi la droite cherchée passe par o et est parallèle à βy.

Il est évident que les tangentes de la cubique gauche, parallèles au plan osculateur (mp, nq) passent par les points où R coupe la parabole B. Ces points sont réels si o est sur βx, au dedans de la parabole, imaginaires si o tombe au dehors sur le prolongement de $x\beta$. Le point o est au dedans (au dehors) de la conique B, si m est sur $\alpha x'$ (sur αx) ; donc les points communs aux lignes R, B sont réels ou imaginaires, selon que mp touche la branche $\alpha h'$ ou la branche αh de la parabole A, ou bien encore, selon que nq touche la branche $\beta k'$ ou la branche βk de la parabole B (*).

Donc chacune des deux paraboles A et B est divisée par le point de la cubique gauche (α ou β) en deux branches ; selon qu'un osculateur touche l'une ou l'autre branche, la conique inscrite située dans ce plan est une hyperbole ou une ellipse.

(*) La droite βx est dans l'intérieur de la parabole B. La droite αx est parallèle à βx, comme on l'a déjà remarqué, et *de même sens*. Le point α divise la parabole A en deux parties indéfinies que l'auteur appelle *branches* : l'une, αh, est située du même côté que αx, l'autre du même côté que $\alpha x'$. Même explication pour βk et $\beta k'$. P.

19. Soit r le point où la droite $\alpha\beta$, qui est la *focale centrale* (13) de la cubique gauche donnée, rencontre mn et par conséquent le plan osculateur (mp, nq). La droite qui joint r au point s, commun aux droites ip, mq, est évidemment parallèle à mp; or cette même droite rs contient le point t de contact du plan osculateur (mp, nq) avec l'ellipse gauche. En effet, la conique inscrite qui est dans ce plan est déterminée par les tangentes mp, nq, pq, et par les points m, i. Donc, si nous considérons les trois tangentes comme côtés d'un triangle circonscrit (dont un sommet est à l'infini), pour trouver le point t de contact sur pq, il suffit de mener la parallèle à mp par le point commun aux droites mq, ip.

Observons encore que, m et i étant les points de contact de deux tangentes parallèles, le centre g de la conique inscrite sera le point milieu de mi.

Il suit, de ce qui précède, que $r\beta$ exprime la distance (mesurée parallèlement à la focale centrale $\alpha\beta$) du point t au plan b. Et on a

$$r\beta : \alpha\beta = \beta n : (\beta n + m\alpha).$$

Le rapport $\beta n : (\beta n + m\alpha)$ (et par conséquent son égal $r\beta : \alpha\beta$) est positif et plus petit que l'unité, seulement quand o est extérieur à la conique B; si o est un point intérieur, ce rapport est négatif ou plus grand que l'unité. Donc tous les plans osculateurs, dont les points de contact avec la cubique gauche sont compris entre les deux plans osculateurs parallèles, contiennent des ellipses inscrites; les autres plans osculateurs contiennent des hyperboles, c'est-à-dire :

L'ellipse gauche a deux plans osculateurs, parallèles entre eux, qui coupent la développable osculatrice suivant deux paraboles; tous les autres plans osculateurs

coupent cette surface suivant des ellipses ou des hyperboles. Les points de la cubique, auxquels correspondent des ellipses, sont situés entre les deux plans osculateurs parallèles; les points auxquels correspondent des hyperboles sont au dehors (*).

20. La conique centrale (13) située dans un plan parallèle et équidistant aux plans a, b, est une hyperbole; son centre est γ, point milieu de $\alpha\beta$; ses asymptotes sont parallèles à αx et βy. Donc le plan $m\alpha\beta$ sépare complétement l'une de l'autre les deux branches de l'hyperbole centrale. Or le centre g de la conique inscrite, située dans le plan osculateur (mp, nq), c'est-à-dire le point milieu de mi, est, par rapport au point $m\alpha\beta$, du même côté que i; et d'ailleurs i est au deçà ou au delà de ce plan, selon que o est intérieur ou extérieur à la conique B; donc la conique inscrite est une ellipse ou une hyperbole, selon que son centre tombe dans l'une ou dans l'autre branche de l'hyperbole centrale. Donc :

Les centres de toutes les coniques (ellipses et hyperboles) inscrites dans la développable osculatrice de l'ellipse gauche sont sur une hyperbole dont le plan est parallèle et équidistant aux deux plans osculateurs parallèles, et les asymptotes sont parallèles aux diamètres des paraboles inscrites situées dans ces derniers plans. Une branche de l'hyperbole centrale contient les centres des ellipses inscrites; l'autre branche contient les centres des hyperboles (**).

21. Au moyen du faisceau des plans conjoints parallèles au plan central (faisceau central), les points de la

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

(**) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

cubique gauche sont conjugués deux à deux en involution (n° 8); les points doubles sont les points α, β de contact des plans osculateurs parallèles. Deux points conjugués sont situés dans deux plans conjoints du faisceau central; la droite qui joint ces plans est génératrice de l'hyperboloïde I enveloppé par les cônes conjoints, dont les sommets sont sur la focale centrale. Deux plans osculateurs conjugués passent par deux points conjoints de cette focale; et leur intersection est une génératrice de l'hyperboloïde J, lieu de toutes les coniques conjointes du faisceau central.

On sait qu'une tangente quelconque de la cubique gauche est rencontrée par les plans osculateurs en une série de points projective au système de ces plans; donc les couples des plans osculateurs conjugués, nommés ci-dessus, détermineront sur αx et βy deux involutions. Dans chacune de ces involutions, un point double est à l'infini; l'autre point double est α pour la première involution, β pour la seconde. Donc chacune de ces involutions n'est qu'une simple symétrie; c'est-à-dire, si deux plans osculateurs conjoints rencontrent αx en m, m' et βy en i, i', on aura

$$m\alpha = \alpha m', \quad i\beta = \beta i'.$$

D'ailleurs nous avons vu (n° 19) que les centres g, g' des coniques inscrites, situées dans ces plans osculateurs, sont les milieux des droites mi, $m'i'$. Donc par une propriété très-connue du quadrilatère gauche, les points g, g' sont en ligne droite avec γ, milieu de $\alpha\beta$ et centre de la conique centrale. Donc :

Deux points de la conique centrale, en ligne droite avec son centre, sont les centres de deux coniques inscrites, situées dans deux plans osculateurs conjugués,

qui rencontrent de nouveau la conique centrale en un même point.

22. Si la cubique gauche a une seule asymptote réelle, la conique centrale est une hyperbole dont les branches sont séparées par le plan $m\alpha\beta$. Ce plan divise en deux parties la parabole B, mais il laisse la parabole A tout entière d'un même côté. Or la conique inscrite située dans le plan (mp, nq) est une ellipse ou une hyperbole, selon que i est sur βy ou sur $\beta y'$; de plus, le centre g de cette conique inscrite est le milieu de mi; donc la branche de l'hyperbole centrale qui contient les ellipses inscrites est du même côté que la courbe A par rapport au plan $m\alpha\beta$; l'autre branche est du côté opposé.

Les traces de deux plans osculateurs conjugués sur le plan de la conique B se rencontrent sur $\beta x'$; les traces des mêmes plans sur le plan de la parabole A se rencontrent sur $\alpha y'$. Donc l'intersection des deux plans osculateurs conjugués rencontrera la conique centrale en un point de la branche qui contient les centres des hyperboles inscrites. C'est-à-dire :

Dans l'ellipse gauche, chaque plan osculateur rencontre en deux points l'hyperbole centrale; ces deux points appartiennent à une même branche ou aux deux branches de cette courbe, suivant que la conique inscrite, située dans le plan nommé, est hyperbole ou ellipse.

Par conséquent, *chaque point de la branche qui contient les centres des hyperboles inscrites est l'intersection de trois plans osculateurs réels de la courbe gauche; au contraire, par chaque point de l'autre branche passe un seul plan osculateur réel.*

En outre, si nous considérons l'hyperboloïde J, lieu

des coniques conjointes du faisceau central, par chaque point de la branche de l'hyperbole centrale qui contient les centres des hyperboles inscrites, passe une génératrice qui est l'intersection de deux plans oculateurs (conjugués) réels, dont l'un contient une ellipse inscrite et l'autre une hyperbole. Et par chaque point de la seconde branche passe une génératrice qui est l'intersection idéale de deux plans osculateurs imaginaires.

On voit aisément que dans l'hyperbole gauche tout point de l'ellipse centrale est l'intersection de trois plans osculateurs réels, et dans l'hyperbole parabolique gauche tout point de la parabole centrale est l'intersection de deux plans osculateurs réels, sans compter le plan de cette conique qui est lui-même osculateur à la courbe gauche.

23. Soient maintenant A une ellipse et B une hyperbole, inscrites, situées dans les plans osculateurs a, b d'une ellipse gauche. Soient α', β' les points de contact des coniques A, B avec la droite intersection de leurs plans; menons par β' la tangente $\beta'\alpha$ à l'ellipse A, et par α' la tangente $\alpha'\beta$ à l'hyperbole B. Si α, β sont les points de contact, ils sont aussi les points où la cubique gauche est osculée par les plans donnés. Soient α'', β'' les points où la droite (ab) est coupée par la tangente de B parallèle à $\alpha'\beta$, et par la tangente de A parallèle à $\beta'\alpha$.

Je me propose de construire les traces, sur a et b, des plans osculateurs parallèles. Si autour du centre c de l'ellipse A on fait tourner un diamètre, les tangentes à ses extrémités déterminent sur (ab) des couples de points m, m' conjugués en involution. Si on fait tourner une droite aussi autour du centre o de l'hyperbole B, on obtiendra sur (ab) une autre involution.

La première involution n'a pas de points doubles réels;

α' est le point central ; β', β'' sont deux points conjugués, et par conséquent l'on a

$$\alpha' m . \alpha' m' = \alpha' \beta' . \alpha' \beta''.$$

La deuxième involution a les points doubles réels, déterminés par les asymptotes de B ; β' est le point central ; α', α'' sont deux points conjugués ; et si m, m'' est un couple quelconque de points conjugués, on aura

$$\beta' m . \beta' m'' = \beta' \alpha' . \beta' \alpha''.$$

A chaque point m de (ab) correspond un point m' dans la première involution et un autre point m'' dans la seconde ; mais si on choisit m de manière que m'' coïncide avec m', par m, m' passeront deux tangentes parallèles de l'ellipse A et deux tangentes parallèles de l'hyperbole B, ce qui donnera les traces des plans osculateurs parallèles.

Or on sait que deux involutions sur une même droite, dont l'une au moins a les points doubles imaginaires, ont toujours un couple commun de points conjugués réels. En effet, si m'' coïncide avec m', les équations cidessus donnent, par l'élimination de m',

$$\overline{\alpha' m}^2 - \alpha' m (\alpha' \alpha'' + \alpha' \beta'') + \alpha' \beta' . \alpha' \beta'' = 0,$$

équation quadratique dont les racines sont réelles, car le produit $\alpha'\beta'$, $\alpha'\beta''$ est évidemment négatif. On en conclut encore que le milieu des points cherchés est le milieu i de $\alpha''\beta''$. Il est maintenant bien facile de construire les points inconnus. Par un point g pris arbitrairement [au dehors de (ab)] on fera passer une circonférence de cercle qui ait pour corde $\beta'\beta''$; cette circonférence et la droite $g\alpha'$ se couperont en un point h. Par g, h on décrira une circonférence dont le centre soit sur la perpendiculaire élevée de i sur (ab) ; cette deuxième circonférence marquera sur (ab) les points cherchés.

Indépendamment de ces points, on peut construire les traces du plan central, ce qui donne aussi la *direction* des plans osculateurs parallèles. Le plan central passe évidemment par les centres c, o des coniques données; donc ses traces seront ic, io.

Si une développable de la troisième classe est donnée par deux hyperboles inscrites, la construction indiquée ci-dessus établira si l'arête de rebroussement est une ellipse gauche, ou une hyperbole gauche, ou une hyperbole parabolique gauche. Les points conjugués communs aux deux involutions sont réels dans le premier cas, imaginaires dans le second, réels coïncidents dans le troisième.

24. Enfin je me propose de déterminer l'espèce des coniques, perspectives de la cubique gauche sur le plan central. Soit S un cône du second degré, perspectif à la courbe gauche, a' son sommet, O′ le plan mené par a' parallèlement au plan central (c'est-à-dire par la *directrice* du plan à l'infini); O le plan conjoint au plan O′. En conservant toutes les autres dénominations des n[os] 6 et 7, l'intersection du cône S par le point O est une conique passant par les points β', γ' de la directrice (à l'infini); or ces points β', γ' sont imaginaires ou réels selon que le plan O coupe la courbe gauche en un seul point réel a ou en trois points réels a, b, c; d'ailleurs l'intersection du cône S par le point O est de la même espèce que l'intersection par le point central, car ces plans sont parallèles. Donc:

Toutes les coniques perspectives de la cubique gauche sur le plan central sont de la même espèce; c'est-à-dire elles sont des hyperboles, des ellipses ou des paraboles selon que la cubique est une hyperbole gauche, ou une ellipse gauche, ou une hyperbole parabolique gauche (*).

(*) *Annali di Matematica*, t. II, luglio-agosto 1859.

Observons que, pour l'hyperbole parabolique gauche, parmi les cônes perspectifs du second ordre, il y a deux cylindres; l'un d'eux est hyperbolique et correspond au point où la courbe est touchée par le plan à l'infini; l'autre est parabolique et correspond au point où le plan à l'infini est simplement sécant. Le plan central est asymptotique au premier cylindre.

Bologne, le 21 avril 1861.

Additions (27 octobre 1862).

M. de Jonquières, dans une Lettre très-obligeante que je viens de recevoir de Vera-Cruz, me fait observer que M. Chasles a prouvé le premier (*Aperçu historique*, p. 834) que deux figures homographiques situées dans un même plan ont trois points doubles, ce qui revient à dire que le lieu du point commun à deux rayons homologues, dans deux faisceaux homographiques de rayons dans l'espace, est une courbe gauche du troisième ordre. J'avais attribué par méprise ce théorème à M. Seydewitz.

Au n° **2**, e est le point commun aux droites bc, ad, et f est l'intersection de ac, bd.

Aux n°s 7 et **11**, chacun des points x, y forme, avec les trois points α, β, γ, un système *équianharmonique* (*); donc x, y sont imaginaires (conjugués), si α, β, γ sont tous réels; mais lorsque α seul est réel, et β, γ imaginaires (conjugués), x, y sont réels. De là on conclut immédiatement le théorème du n° **12**, sans avoir recours à la théorie des courbes planes de quatrième ordre et de troisième classe.

(*) *Voir* mon *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, n° 26. Bologna, 1862.

QUESTION 627.

SOLUTION DE MM. ABRAHAM SCHNÉE ET PALMA GOURDON,
Elèves du lycée Charlemagne.

Les droites inscrites dans un angle droit XOY, *et qui ont leurs milieux sur une même droite* AB *rencontrant les côtés* OX, OY *de cet angle en des points différents* A, B, *sont toutes tangentes à la même parabole.*

Soient $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ l'équation de la droite fixe AB, et

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \tag{1}$$

celle de la droite mobile : le milieu de la droite (1) étant sur AB, on aura

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=2. \tag{2}$$

L'élimination de α entre les équations (1) et (2) donne

$$a\beta^2-(2ab+bx-ay)\beta+2aby=0, \tag{3}$$

Pour avoir l'enveloppe des droites représentées par l'équation (3), j'élimine le paramètre arbitraire β entre l'équation (3) et sa dérivée

$$2a\beta-(2ab+bx-ay)=0,$$

j'obtiens ainsi

$$(bx-ay+2ab)^2-8a^2by=0 \;(*), \tag{4}$$

équation qui représente une parabole.

(*) L'élimination d'un paramètre β entre une équation $f(x, y, \beta)=0$ et sa dérivée par rapport à β donne la condition qui doit être remplie par

Il est facile de constater que cette parabole est tangente aux axes OX, OY en des points A′, B′ dont les distances à l'origine sont respectivement égales à 2OA, 2OB. La droite OM′, menée du point O au milieu M′ de la corde des contacts A′B′, est parallèle à l'axe. La perpendiculaire élevée à OM′ au point O est la directrice, et le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur A′B′ est le foyer.

Note. — Ces remarques se trouvent dans la solution de M. Schnée. M. A. Mogni, de Tortone; MM. Hans et Vendenbroucque, élèves du lycée Saint-Louis, nous ont récemment adressé des solutions de la question 627, peu différentes de celle de MM. Schnée et Gourdon.

QUESTION.

632. On prend le sommet d'un des trois angles dont les côtés réunissent, deux à deux, quatre points donnés d'une conique, et l'on cherche par rapport aux côtés de cet angle la *conjuguée harmonique* de la droite qui joint ce sommet au centre de la conique : démontrer que cette conjuguée et les deux droites analogues sont parallèles.

(HOUSEL.)

---

x, y pour que l'équation $f(x, y, 6) = 0$ ait deux racines égales, en y considérant 6 comme l'inconnue de l'équation. Quand l'équation $f(x, y, 6) = 0$ est du second degré, de la forme $A6^2 + B6 + C = 0$, on a immédiatement pour l'équation de l'enveloppe $B^2 - 4AC = 0$. Si elle est du troisième degré de la forme $6^3 + p6 + q = 0$, l'équation de l'enveloppe est $4p^3 + 27q^2 = 0$. G.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

De M. Eugène BELTRAMI, de Milan.

Remarque au sujet d'un théorème de M. Laurent.

La considération des spirales dans la théorie des séries, qui a conduit M. Laurent à son beau et remarquable théorème (cahiers de mars et d'avril), avait été employée dès 1837 par M. Schellbach, dans un intéressant article, inséré au tome XVI du Journal de Crelle, avec ce titre : *Ueber eine eigenthümliche Entwicklung der sinus-und cosinusreihe nach Potenzen des Bogens*. Ce savant géomètre s'était toutefois borné au cas de $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Comme cet écrit ne m'est tombé sous les yeux que d'une manière tout à fait incidentelle, j'ignore si son auteur a publié depuis d'autres développements sur la même matière.

Note. — Nous avons reçu de M. Beltrami une solution de la question 624, que nous ferons connaître prochainement.

DE L'ÉQUATION DU SYSTÈME DE QUATRE NORMALES MENÉES D'UN POINT A UNE ELLIPSE;

Par M. CROFTON.

Trouver l'équation du quatrième degré qui représente les quatre normales menées du point (α, β) *à l'ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Posons

$$H = c^2 xy - a^2 \alpha y + b^2 \beta x, \quad L = c^2 \alpha\beta - a^2 \beta x + b^2 \alpha y,$$

l'équation cherchée sera

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) H^2 + 2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) HL$$
$$+ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) L^2 = 0.$$

Pour le démontrer, nous remarquons d'abord que $H = 0$ est une hyperbole qui passe par les quatre points où l'ellipse est rencontrée par les quatre normales menées de (α, β), et aussi par le point (α, β); et que $L = 0$ est la tangente à cette hyperbole au point (α, β). Or, si U_1 et U_2 sont deux polynômes indéterminés respectivement du premier et second degré en x et y, l'équation

$$(1) \qquad H^2 + U_1 HL + U_2 L^2 = 0$$

est l'équation générale d'une courbe du quatrième degré dont deux branches se touchent au point (α, β), la tangente commune étant $L = 0$. Comme quatre lignes droites passant par (α, β) en sont un cas particulier, l'équation que nous cherchons sera de la forme (1), où il reste à déterminer U_1 et U_2. Or, comme la courbe (1) doit passer par les intersections de $H = 0$ avec l'ellipse

$$\mathcal{E} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

il faut d'abord que $U_2 = k\mathcal{E}$, k étant une constante; donc l'équation (1) devient

$$(2) \qquad H^2 + U_1 HL + k\mathcal{E} L^2 = 0.$$

Pour que l'équation (2) représente quatre droites, il

faut que les intersections de la ligne (2) avec une droite quelconque (autre que les normales) passant par (α, β) coïncident avec le point (α, β). Or

$$H + L = c^2(x-\alpha)(y-\beta),$$

c'est-à-dire que $H + L = 0$ représente deux droites passant par (α, β). Leurs intersections avec la ligne (2) sont données par

$$(1 - U_1 + k\mathcal{E})L^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux facteurs dont le premier, $L^2 = 0$, représente une droite qui rencontre les lignes $H + L = 0$ en (α, β) seulement; et pour qu'il en soit de même de l'autre, $1 - U_1 + k\mathcal{E} = 0$, il faut déterminer k et U_1 de manière que cette équation représente le point (α, β). Pour cela nous devrons avoir

$$k\mathcal{E} - U_1 + 1 = k\left[\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2}\right],$$

d'où

$$U_1 - 1 = k\left(\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right). \tag{3}$$

Pour trouver une autre condition, supposons que la ligne (2) soit coupée par les deux droites imaginaires $k\mathcal{E} - U_1 + 1 = 0$; aux intersections, nous aurons

$$(H + L)(H + k\mathcal{E}L) = 0$$

ou bien

$$(H + L)[H + (U_1 - 1)L] = 0.$$

Or il faut que chacune des deux équations dont celle-ci se compose, savoir

$$H + L = 0, \quad H + k\left(\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)L = 0,$$

représente deux droites passant par (α, β). Pour qu'il en soit ainsi de la seconde, il faut que

$$\mathrm{H} + k\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)\mathrm{L} = 0$$

représente deux droites (*); d'où

$$(4) \qquad k\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) = 1.$$

Substituant dans l'équation (2) les valeurs de U_1 et de k, tirées des équations (3) et (4), il vient pour l'équation des normales

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)\mathrm{H}^2 + 2\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\mathrm{HL} + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\mathrm{L}^2 = 0.$$

On peut prouver de même que, si $\mathrm{U} = 0$ est une conique quelconque, $\mathrm{T} = 0$ la tangente au point (α, β), et δ une constante telle, que l'équation $\mathrm{U} + \delta\mathrm{T} = 0$ représente deux droites, alors l'équation des quatre droites menées de (α, β) aux intersections de la conique $\mathrm{U} = 0$

(*) Car, si $\mathrm{U} = 0$ représente une courbe du second degré, $\mathrm{T} = 0$ une tangente [au point (x', y')], $\mathrm{A} = 0$ une droite quelconque, alors, pour que

$$\mathrm{U} + \mathrm{AT} = 0$$

représente deux droites, il faut que

$$\mathrm{U} + \mathrm{A}'\,\mathrm{T} = 0,$$

où A' représente la valeur de A quand on y substitue x', y' aux coordonnées courantes, soit aussi l'équation de deux droites (soit réelles, soit imaginaires).

avec l'ellipse $E = o$, sera

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) U^2 + 2\delta \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) UT$$
$$+ \delta^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) T^2 = o.$$

Si $L = o$ est une droite quelconque, (x', y') un point quelconque, L' la valeur de L quand on y substitue x' et y' à x et à y, l'équation

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) L^2 - 2\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right) LL'$$
$$+ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) L'^2 = o$$

représente les deux droites menées de (x', y') aux intersections de $L = o$ avec l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

L'équation connue des deux tangentes menées de (x', y') à l'ellipse, savoir

$$\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right),$$

en est un cas particulier.

On peut prouver directement que l'équation des quatre lignes droites, menées d'un point donné (α, β) aux quatre points où l'ellipse est rencontrée par une courbe quelconque du second degré $H = o$, qui passe par (α, β), sera

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) H^2 + 2\delta \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) HL$$
$$+ \delta^2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right) L^2 = o,$$

où $L = o$ est la tangente à $H = o$ au point (α, β), et δ

une constante telle, que l'équation $H + \delta L = 0$ représente deux droites, réelles ou imaginaires.

Posons

$$\mathcal{E} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \quad P = \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1, \quad A = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1,$$

l'équation ci-dessus sera alors

$$AH^2 + 2\delta PHL + \delta^2 \mathcal{E} L^2 = 0;$$

la ligne qu'elle représente passe évidemment par les quatre intersections de $\mathcal{E} = 0$ avec $H = 0$. De plus, elle se compose de quatre lignes droites, passant par (α, β); car son équation peut s'écrire :

$$\delta^2 L^2 (\mathcal{E} - 2P + A) + AH^2 + 2\delta PHL + 2\delta^2 L^2 P - A\delta^2 L^2 = 0,$$

ou bien

$$\delta^2 L^2 (\mathcal{E} - 2P + A) + (H + \delta L)(AH - A\delta L + 2\delta PL) = 0$$

ou

$$(1) \quad \delta^2 L^2 (\mathcal{E} - 2P + A) + (H + \delta L)[A(H + \delta L) + 2\delta L(P - A)] = 0.$$

Or l'équation

$$A(H + \delta L) + 2\delta L(P - A) = 0$$

représente deux lignes droites passant par (α, β); car

$$A(H + \delta L) = 0 \quad \text{et} \quad 2\delta L(P - A) = 0$$

sont chacune l'équation de deux droites passant par (α, β). De plus

$$\mathcal{E} - 2P + A = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 0$$

représente deux droites imaginaires passant par (α, β). Par conséquent chacun des deux termes dont l'équa-

tion (1) se compose, égalé à zéro, représente quatre droites passant par (α, β); donc l'équation (1) elle-même représente quatre droites passant par (α, β).

Cette équation peut représenter les quatre rayons menés d'un point donné (α, β) à quatre points quelconques sur l'ellipse; car on peut toujours faire passer une conique par (α, β) et ces quatre points, et on peut toujours déterminer la constante δ, pour que $H + \delta L = 0$ représente deux droites.

SOLUTION DE LA QUESTION 630 GÉNÉRALISÉE;

PAR M. H. DELORME.

Le système des deux équations

$$x^{2m} = ay^{2n} + 1, \quad x^{2p+1} = by^{2q+1} + c,$$

dans lesquelles $a+1$ *et* c *sont des multiples de* 3, *et* b *un nombre entier non divisible par* 3, *n'admet ni solution entière, ni solution composée d'une valeur entière d'une inconnue et d'une valeur fractionnaire de l'autre.*

Nous allons d'abord poser quelques principes d'arithmétique sur les nombres non divisibles par 3.

I. Le produit ou le quotient (*) de deux nombres de la forme $3k+1$ ou de la forme $3k-1$ est de la forme $3k+1$.

II. Le produit ou le quotient de deux nombres de

(*) Je suppose la division possible. Les deux principes s'étendent facilement au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

formes différentes $3k+1$, $3k-1$ est de la forme $3k-1$.

Cela posé, revenons à notre question, que nous diviserons en trois parties :

1° Si l'on donne à x une valeur entière, aucune valeur entière de y ne satisfait aux équations proposées.

En effet, ou x est divisible par 3 ou il ne l'est pas. Si x est divisible par 3, $x^{2p+1}-c$ le sera; by^{2q+1} devra donc l'être; donc y devra être divisible par 3 : or, si x et y sont divisibles par 3, la première équation ne peut être satisfaite. Si x n'est pas divisible par 3, x^{2m}, en vertu du principe précédent (II), sera de la forme $3k+1$; donc $x^{2m}-1$ est divisible par 3, donc ay^{2n} devra l'être, et a ne l'étant pas, y le sera : mais l'hypothèse de x non divisible et de y divisible par 3 est contraire à la seconde équation $x^{2p+1}=by^{2q+1}+c$.

Le système de ces deux équations n'admettra donc pas de solution entière.

2° y étant un nombre entier, aucune valeur fractionnaire de x ne satisfait aux deux équations. En effet, a, y et 1 étant des nombres entiers, le second membre de la première équation est entier, le premier doit donc l'être.

3° x étant un nombre entier, y ne peut être une fraction.

En effet, écrivons les équations

$$x^{2m}-1=ay^{2n},$$
$$x^{2p+1}-c=by^{2q+1};$$

les premiers membres étant entiers, les seconds devront l'être, ce qui n'aura pas lieu si y est de la forme $\frac{u}{t}$, sauf les cas où t^{2n} est un diviseur de a et t^{2q+1} un diviseur de b.

Examinons ce cas. Remarquons d'abord que t ne peut être divisible par 3. Remplaçons dans les deux équations

y par $\frac{u}{t}$, on aura

$$x^{2m} = \frac{a}{t^{2n}} u^{2n} + 1,$$

$$x^{2p+1} = \frac{b}{t^{2q+1}} u^{2q+1} + c.$$

Il faut chercher si ce système d'équations peut être satisfait par des valeurs entières de x et de u. Or nous sommes ramenés au cas précédent, car, b et t^{2q+1} n'étant pas divisibles par 3, $\frac{b}{t^{2q+1}}$ ne l'est pas non plus.

a est de la forme $3k-1$, t^{2n} de la forme $3k+1$, Donc, d'après le principe (II), $\frac{a}{t^{2n}}$ est de la forme $3k-1$. Nous avons vu que ce système d'équations n'admettait pas de solution entière; donc à une valeur entière de x ne peut répondre une valeur fractionnaire de y.

Note. — La question 630, non généralisée, a été résolue par M. Mogni; par M. Thomasset, élève du lycée de Lyon; et par MM. Hans et Vandenbroncque, élèves du lycée Saint-Louis.

M. Mogni nous a aussi adressé une solution de la question 616, déjà résolue par M. Siacci (numéro de septembre, p. 328). Nous en prenons occasion de faire observer que cette proposition (616) n'est qu'un cas particulier d'une proposition générale dont voici l'énoncé.

Soit AB *une droite d'une longueur déterminée dont les deux extrémités* A, B *sont assujetties à rester sur deux lignes données* M, N, *de formes quelconques, mais situées dans un même plan. Si par les points* A, B, *on mène des normales aux lignes* M, N, *et que du point de rencontre* C *de ces normales on abaisse une perpendiculaire* CD *sur la droite* AB, *le pied* D *de cette per-*

pendiculaire sera le point auquel AB *touche son enveloppe.*

Cette proposition générale est due, je le crois du moins, à de l'Hospital; il l'a démontrée dans son *Analyse des infiniment petits* (p. 189, 2e édition, 1715).

On en trouve aussi une démonstration dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (t. Ier, p. 209; édition de 1856) (*).

Lorsque les lignes M, N sont des droites OX, OY, les normales AC, BC deviennent des perpendiculaires à OX, OY; le quadrilatère OACB est inscriptible dans le cercle dont OC est un diamètre, et si du point O on abaisse une perpendiculaire OF sur la corde AB, on aura évidemment

$$BF = AD, \quad AF = BD,$$

ce sont les égalités énoncées dans la proposition (616).

Quand l'angle XOY est droit, l'enveloppe de AB est l'épicycloïde engendrée par un point d'une circonférence dont le rayon est égal au quart de AB, et qui roule intérieurement sur la circonférence décrite du point O comme centre avec AB pour rayon. C'est démontré, sans aucun calcul, dans le *Cours d'Analyse* de Sturm (t. II, p. 73). G.

QUESTION 626;

SOLUTION

DE MM. ERNEST HANS ET VICTOR VANDENBRONCQUE,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

Je prends pour axes des coordonnées les diagonales du

(*) M. Joseph Sacchi a démontré la même proposition et deux autres également remarquables, relatives à l'enveloppe d'une droite. Les démonstrations de M. Sacchi seront insérées dans le numéro de janvier. G.

quadrilatère ; et j'appelle a, a' ; b, b' les segments de chacune des diagonales, qui sont des coordonnées des quatre sommets du quadrilatère.

L'équation d'une conique passant par les points milieux des côtés du quadrilatère est

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a'}{2}\right)=\lambda\left(y-\frac{b}{2}\right)\left(y-\frac{b'}{2}\right).$$

Je détermine λ par la condition que la courbe doit passer par le point milieu de l'une des diagonales

$$\left(x=0,\quad y=\frac{b+b'}{2}\right),\quad \text{d'où}\quad \lambda=\frac{aa'}{bb'};$$

l'équation de la conique devient

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a'}{2}\right)}{aa'}=\frac{\left(y-\frac{b}{2}\right)\left(y-\frac{b'}{2}\right)}{bb'}$$

ou

$$\frac{1}{aa'}\left(x^2-\frac{a+a'}{2}x\right)=\frac{1}{bb'}\left(y^2-\frac{b+b'}{2}y\right).$$

Sous cette forme l'équation montre que la courbe passe par l'origine et par le milieu $\left(y=0,\ x=\frac{a+a'}{2}\right)$ de l'autre diagonale.

Le point de rencontre des deux côtés opposés dont les équations sont

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1,$$

est sur la courbe.

Car on peut mettre l'équation de la courbe sous la

forme

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{a'}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{b'}-\frac{1}{2}\right),$$

et en y remplaçant $\frac{x}{a}$, $\frac{x}{a'}$ par leurs valeurs $1-\frac{y}{b}$, $1-\frac{y}{b'}$, on arrive à une identité.

Discussion. — L'équation de la courbe peut s'écrire

$$\frac{\left(x-\frac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'}-\frac{\left(y-\frac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'}=\frac{\left(\frac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'}-\frac{\left(\frac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'}.$$

1° Si le quadrilatère est convexe, la courbe est une hyperbole, car a, a' sont de signes contraires, ainsi que b et b'. Le centre est le point $\left(x=\frac{a+a'}{4}, y=\frac{b+b'}{4}\right)$, milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales.

Les diagonales sont parallèles à un système de diamètres conjugués. Les asymptotes sont parallèles aux droites $\frac{y^2}{bb'}-\frac{x^2}{aa'}=0$.

Dans le cas particulier où $a^2+a'^2=b^2+b'^2$, le lieu se réduit à deux droites.

Si le quadrilatère est inscriptible à un cercle, on a

$$aa'=bb',$$

la courbe devient une hyperbole équilatère, et les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles des diagonales.

Le centre de la circonférence circonscrite est déterminé par l'intersection des perpendiculaires élevées sur les milieux des diagonales, ayant pour équations

$$(\alpha)\qquad x+y\cos\theta=\frac{a+a'}{2},$$

et

$$(\beta) \qquad y + x\cos\theta = \frac{b+b'}{2}.$$

Remplaçant dans l'équation de la courbe qui devient, lorsque $aa' = bb'$,

$$x\left(x - \frac{a+a'}{2}\right) = y\left(y - \frac{b+b'}{2}\right),$$

$x - \frac{a+a'}{2}$, $y - \frac{b+b'}{2}$ par leurs valeurs tirées des équations (α), (β), on arrive à une identité; donc ce centre appartient à l'hyperbole équilatère.

2° Si le quadrilatère n'est pas convexe, c'est-à-dire s'il est formé de deux triangles ayant une base commune et situés d'un même côté de cette base, les produits aa', bb' ont des signes contraires, et la courbe représentée par l'équation

$$\frac{\left(x - \frac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'} - \frac{\left(y - \frac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'} = \frac{\left(\frac{a+a'}{4}\right)^2}{aa'} - \frac{\left(\frac{b+b'}{4}\right)^2}{bb'}$$

est une ellipse réelle.

Si $aa' = -bb'$, les diamètres parallèles aux diagonales sont égaux, et lorsque les diagonales sont rectangulaires, la courbe est une circonférence.

Note. — M. V. R. (à Cahors) nous a adressé une solution entièrement semblable à la précédente, et suivie de la même discussion.

Cette question a aussi été résolue par M. Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne.

QUESTION 629 (VANNSON);

SOLUTION DE MM. L. ANDLAUER ET G. CHAUVEAU,
Elèves de mathématiques spéciales.

Prenons pour axes de coordonnées trois arêtes contiguës du tétraèdre et soient $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs de ces arêtes.

L'équation générale des surfaces du second degré est

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Pour que les axes soient tangents à cette surface aux points

$$\begin{array}{lll} x = 0, & x = 0, & x = a, \\ y = 0, & y = b, & y = 0, \\ z = c, & z = 0, & z = 0, \end{array}$$

il faut, en posant $D = 1$, que l'on ait

$$A'' = \frac{1}{c^2}, \quad A' = \frac{1}{b^2}, \quad A = \frac{1}{a^2},$$

$$C'' = -\frac{1}{c}, \quad C' = -\frac{1}{b}, \quad C = -\frac{1}{a}.$$

L'équation de la surface devient donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} + 1 = 0.$$

Il faut exprimer maintenant que cette surface passe par les milieux des trois autres arêtes, c'est-à-dire que son

équation est satisfaite par

$$\begin{array}{lll} x = 0, & y = 0, & z = 0, \\ y = b, & z = c, & x = a, \\ z = c, & x = a, & y = b, \end{array}$$

ce qui nous donne

$$B = \frac{1}{2bc}, \quad B' = \frac{1}{2ac}, \quad B'' = \frac{1}{2ab}.$$

Il nous vient donc pour l'équation de la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} + 1 = 0.$$

Il est clair maintenant que cette surface est tangente à ces trois autres arêtes; en effet, si nous cherchons son intersection avec l'une d'elles, nous trouvons pour

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 2, \\ y = 0, \end{array} \right.$$

que les z d'intersection sont donnés par

$$\left(\frac{z}{c} - 1\right)^2 = 0,$$

ce qui prouve bien que la droite est tangente à la surface.

Les équations qui déterminent les coordonnées du centre de cette surface sont

$$\begin{aligned} \frac{2x}{a^2} + \frac{z}{ac} + \frac{y}{ab} - \frac{2}{a} = 0, \\ \frac{2y}{b^2} + \frac{z}{bc} + \frac{x}{ab} - \frac{2}{b} = 0, \\ \frac{2z}{c^2} + \frac{y}{bc} + \frac{x}{ac} - \frac{2}{c} = 0. \end{aligned}$$

Et ces équations sont satisfaites par les coordonnées du centre de gravité du tétraèdre

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}.$$

Si l'on rapporte la surface à son centre, son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} = \frac{1}{2}.$$

Note. — La même solution nous a été adressée par MM. Hans et Vandenbroncque, élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot).

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. PAUL SERRET

(voir p. 323);

PAR M. N. NICOLAÏDÈS (DE LA GRÈCE),
Élève externe des Ponts et Chaussées.

---

1. *Soient a_1, a_2, a_3,..., a_n les longueurs des côtés consécutifs d'un polygone* ABCD..., *inscrit dans un cercle;* M *un point pris sur l'arc sous-tendu par le côté a_1 ou* AB; *p_1, p_2, p_3,..., p_n les distances positives de* M *aux côtés a_1, a_2,..., a_n; on aura*

$$(1) \qquad \frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \ldots + \frac{a_n}{p_n}.$$

Si ce théorème est vrai dans le cas d'un triangle, il existera de même pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

En effet, nommons b_1, b_2,..., b_{n-2} les diagonales AC, AD,..., menées du point A aux sommets C, D,...,

du polygone, et $q_1, q_2, \ldots, q_{n-2}$ les distances positives du point M à ces diagonales; on aura par hypothèse

$$\frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \frac{b_1}{q_1}, \quad \frac{b_1}{q_1} = \frac{a_3}{p_3} + \frac{b_2}{q_2}, \ldots, \quad \frac{b_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{a_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{a_n}{p_n}.$$

En additionnant ces équations, on trouve l'égalité (1).

Tout se réduit donc à démontrer le théorème pour le cas particulier d'un triangle ABC.

Prenons pour axes les côtés AB, AC qui forment un angle θ; et désignons par x', y' les coordonnées du point M extérieur au triangle ABC, dont le côté BC a pour équation $y = ax + b$.

Les longueurs des côtés AB, AC, BC seront

$$b, \quad \frac{-b}{a}, \quad \frac{-b}{a}\sqrt{a^2+1+2a\cos\theta},$$

et les distances positives du point M (x', y') à ces côtés auront pour valeurs

$$-x'\sin\theta, \quad y'\sin\theta, \quad \frac{-(y'-ax'-b)\sin\theta}{\sqrt{a^2+1+2a\cos\theta}}.$$

L'équation

$$\frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3}$$

deviendra

$$\frac{-b}{x'\sin\theta} = \frac{-b}{a\sin\theta} + \frac{b\,(a^2+1+2a\cos\theta)}{a\,(y'-ax'-b)\sin\theta}$$

ou

$$-ay'(y'-ax'-b)$$
$$= -x'(y'-ax'-b) + x'y'(a^2+1+2a\cos\theta).$$

Développant et réduisant, on trouve

$$a(x'^2+y'^2) + 2ax'y'\cos\theta + bx' - aby' = 0,$$

équation d'une circonférence circonscrite au triangle ABC. Ainsi la relation générale (1) est établie.

La réciproque se déduit facilement de la proposition directe, au moyen de la méthode connue de réduction à l'absurde. Et de cette réciproque on conclura que si le point M se meut sous la condition que ses distances positives p_1, p_2,..., p_n aux côtés du polygone inscrit, sont liées par la relation (1), le point M décrit l'arc du cercle circonscrit au polygone, sous-tendu par le côté a_1.

Remarquons que deux des distances p_1, p_2 changent de signe quand le point M passe par l'un des sommets du polygone inscrit.

2. Théorème III (p. 324). — *Soient* O, O′ *deux cercles fixes coupés par un troisième variable* O″ *à angles droits ; le premier aux points* A, B, *le second en* C *et* D; *les côtés opposés* AD, BC *du quadrilatère* ABCD *se couperont en un point fixe, et il en sera de même des diagonales* AC, BD.

Supposons que les rayons OA , O′D prolongés se rencontrent en F ; les droites FA, FD seront égales comme tangentes menées du point F à la circonférence variable O″. Il en résulte que le point F est le centre d'une circonférence qui touche extérieurement les circonférences fixes O et O′ aux points A et D; donc la corde des contacts A, D prolongée passera par le point H où la droite des centres OO′ est rencontrée par une tangente commune aux deux circonférences O, O′. C'est là une proposition connue. De même la droite BC prolongée passera par le point H. Ainsi les côtés opposés AD, BC du quadrilatère variable ABCD se coupent en un point fixe.

Actuellement, soit F′ l'intersection des rayons AO, O′C prolongés. On aura F′A = F′C comme tangentes menées du point F à la circonférence variable O″. Il s'ensuit que la circonférence décrite du point F′ comme centre avec OA touche intérieurement la circonférence O

au point A, et extérieurement la circonférence O′ au point C. Par conséquent, la corde des deux contacts AC rencontre la droite OO′ en un point H′ appartenant à une tangente commune aux deux circonférences O et O′. On voit de même que H′ appartient à la droite BD. Donc les diagonales AC, BD du quadrilatère variable ABCD se coupent en un point fixe H′.

Le même théorème a encore lieu lorsqu'une des deux circonférences O, O′ est remplacée par une droite indéfinie.

3. Théorèmes VI et VII (p. 324). — *Un cercle variable passant constamment par un point fixe* O, *si l'enveloppe de la droite qui réunit ses traces sur un cercle fixe est représentée par* $f(\rho, \omega) = 0$, *l'équation*

$$f\left(\frac{m}{\rho + n\cos\omega}, \omega\right) = 0,$$

où m *et* n *désignent des constantes, représentera l'enveloppe du cercle variable.*

Prenons le point fixe O comme origine des coordonnées polaires et la droite qui unit ce point au centre C du cercle fixe pour axe polaire; en désignant par α, 6 les coordonnées rectangulaires du centre du cercle variable, l'équation de ce cercle sera

$$(1) \qquad \rho = 2(\alpha\cos\omega + 6\sin\omega).$$

Soient A le rayon du cercle fixe, et p la distance de son centre C au pôle O. Ce cercle sera représenté par

$$(2) \qquad \rho^2 - 2\rho p\cos\omega + p^2 = A^2.$$

La combinaison des équations (1) et (2) donne

$$(3) \qquad 2\rho(\alpha\cos\omega + 6\sin\omega - p\cos\omega) = A^2 - p^2;$$

c'est l'équation de la droite passant par les points d'intersection de deux cercles.

Pour obtenir l'enveloppe de la circonférence (1), en considérant β comme une fonction quelconque de α, il faut d'abord différentier l'équation (1) par rapport à α, ce qui donne

$$(4) \qquad \cos\omega + \sin\omega \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Cette dernière équation représente, pour des valeurs déterminées de α et β, une droite menée par l'origine O, parallèlement à la normale, au point α, β, à la courbe décrite par le centre du cercle variable. Cette droite doit d'ailleurs contenir le point auquel la circonférence variable touche son enveloppe.

Or, en différentiant de même par rapport à α l'équation (3) de la corde variable, on a encore l'équation (4); donc, pour des valeurs déterminées de α et β, les points auxquels les lignes (1) et (3) touchent leurs enveloppes appartiennent à la droite (4). Les rayons vecteurs menés de l'origine à ces deux points de contact sont d'ailleurs donnés par les équations (1) et (3) dans lesquelles la valeur de ω est la même. Il en résulte qu'en nommant ρ' le premier rayon vecteur et ρ le second, on a

$$\rho(\rho' - 2p\cos\omega) = A^2 - p^2,$$

d'où

$$(5) \qquad \rho = \frac{A^2 - p^2}{\rho' - 2p\cos\omega}.$$

Par conséquent, si l'équation de l'enveloppe de la droite (3) est $f(\rho, \omega) = 0$, celle de l'enveloppe de la circonférence mobile (1) sera

$$f\left(\frac{A^2 - p^2}{\rho' - 2p\cos\omega}, \omega\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{A^2 - p^2}{\rho - 2p\cos\omega}, \omega\right) = 0.$$

Le théorème VII est ainsi démontré.

Si l'on suppose $p = 0$, l'équation (5) se réduit à $\rho\rho' = A^2$, ce qui démontre le théorème VI (p. 234).

Remarque. — L'équation différentielle

$$(6)\qquad \left(x\frac{dy^2}{dx^2}-y\frac{dy}{dy}\right)^2+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)=A\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)^2.$$

représente les courbes que le centre du cercle variable doit décrire pour que son enveloppe soit un cercle, A est une constante.

Une intégrale de cette équation est $x^2+y^2=A$ (*).

Note du Rédacteur. — M. Nicolaïdès a aussi résolu la question 627 (p. 447), et il a joint à sa solution la remarque suivante :

Si le milieu d'une droite inscrite dans un angle YOX *est sur la parabole* $y^2=2px$, *cette droite sera tangente à la parabole* $y^2=-16px$.

En effet, désignons par $y=ax+b$ l'équation de la droite inscrite dans l'angle YOX; les coordonnées de son milieu seront

$$y=\frac{b}{2},\quad x=-\frac{b}{2a}.$$

Ce point appartenant à la parabole $y^2=2px$, on aura

$$\frac{b^2}{4}=-\frac{bp}{a}\quad \text{ou}\quad b=-\frac{4p}{a}.$$

(*) En posant $\frac{dy}{dx}=p$ et supprimant le facteur commun p^2+1, l'équation différentielle (6) se réduit à

$$(y-px)^2-A(p^2+1)=0.$$

En différentiant cette dernière par rapport à x, il vient

$$[(y-px)x+Ap]dp=0,$$

d'où

$$dp=0\quad \text{ou}\quad p=c\quad \text{et}\quad (y-px)x+Ap=0.$$

L'élimination de p entre $p=c$ et $(y-px)^2-A(p^2+1)=0$ donne immédiatement $(y-cx)^2-A(c^2+1)=0$; c'est l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

En éliminant p entre $(y-px)x+Ap=0$ et $(y-px)^2-A(p^2+1)=0$, on trouve $x^2+y^2=A$; ce qui est une *solution singulière*. G.

Par suite l'équation $y = ax + b$ devient

$$y = ax - \frac{4p}{a} \quad \text{ou} \quad a^2 x - ay - 4p = 0.$$

En éliminant a entre cette dernière équation et sa dérivée par rapport à a, on trouve

$$y^2 + 16px = 0$$

pour l'enveloppe des droites inscrites dans YOX et qui ont leurs milieux sur $y^2 = 2px$. C. Q. F. D.

QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES (ANNÉE 1862);

SOLUTION DE M. J. ROMAND,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Composition en Analyse appliquée.

Étant données deux droites non situées dans le même plan, on fait passer par ces droites un paraboloïde hyperbolique auquel on mène un plan tangent parallèle à un plan fixe et donné : on demande le lieu du point de contact.

L'origine des coordonnées sera le milieu O de la plus courte distance AA′ des deux droites données D, D′; les parallèles menées à ces droites par le point O seront les axes des z et des y; l'axe des x sera dans la direction de AA′, par conséquent perpendiculaire au plan yz.

En désignant par $2a$ la distance AA′, les équations des droites données sont

$$(\text{D}) \quad y = 0, \quad x = a, \qquad (\text{D}') \quad z = 0, \quad x = -a.$$

Soient

$$(\text{G}) \qquad y = 6x + b, \quad z = \gamma x + c$$

les équations d'une droite qui engendre un paraboloïde en restant assujettie aux deux conditions de glisser sur les deux droites données et d'être toujours parallèle à un plan directeur représenté par

(P) $$x + my + nz = p.$$

La première condition conduit à

(1) $$0 = \beta a + b, \quad 0 = \gamma a - c;$$

la seconde à

(2) $$1 + m\beta + n\gamma = 0.$$

L'élimination des quatre paramètres variables β, γ, b, c entre ces trois équations et les deux équations (G) fournira celle du paraboloïde.

Les équations (G) et (1) donnent

$$\beta = \frac{y}{x-a}, \quad \gamma = \frac{z}{x+a};$$

remplaçant β et γ par ces valeurs dans l'équation (2), on a

(3) $$1 + \frac{my}{x-a} + \frac{nz}{x+a} = 0,$$

d'où

$$x^2 + nzx + mxy + amy - anz - a^2 = 0;$$

m et n restant arbitraires, cette équation représente tout paraboloïde hyperbolique passant par les deux droites données D, D'.

D'après une règle connue, l'équation du plan tangent au point x, y, z d'un de ces paraboloïdes est

$$(2x + my + nz)x' + m(x+a)y' + n(x-a)z' \\ + amy - anz - 2a^2 = 0.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan donné

(P') $$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

il faut qu'on ait

$$(4)\qquad B(2x + my + nz) = Am(x + a),$$

$$(5)\qquad Cm(x + a) = Bn(x - a).$$

Il ne reste plus qu'à éliminer m et n entre ces deux équations et celle des paraboloïdes pour avoir l'équation du lieu géométrique demandé.

L'équation (5) donne $m = \frac{B(x-a)}{C(x+a)}n$; substituant cette valeur à m dans l'équation (4) et tirant celle de n, on a

$$n = \frac{-2Cx(x+a)}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)},$$

$$m = \frac{-2Bx(x-a)}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)};$$

par la substitution de ces valeurs à m, n dans l'équation (3), on obtient d'abord

$$1 - \frac{2Bxy + 2Czx}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)} = 0,$$

puis, toutes réductions faites,

$$Ax^2 + Czx + Bxy + Bay - Caz - Aa^2 = 0.$$

Si le lieu avait un centre, les coordonnées de ce point seraient déterminées par les équations

$$(C)\qquad 2Ax + By + Cz = 0,\quad Bx + Ba = 0,\quad Cx - Ca = 0.$$

Lorsque B et C diffèrent l'un et l'autre de zéro, les deux dernières sont incompatibles; le lieu n'a donc pas de centre. Son équation se réduit, pour $x = 0$, à

$$By - Cz - Aa = 0,$$

ce qui indique qu'il est coupé suivant une droite seulement par le plan yz; ce lieu est donc un *paraboloïde hyperbolique* ayant un plan directeur parallèle au plan

yz et par conséquent parallèle aux deux droites D, D'. On voit facilement du reste qu'il passe par ces deux droites, car son équation est vérifiée par $y = o$, $x = a$ pour toute valeur de z, et par $z = o$, $x = -a$ pour toute valeur de y ; c'est donc un des paraboloïdes indiqués dans l'énoncé.

B et C étant toujours supposés différents de zéro, lorsque $A = o$, c'est-à-dire lorsque le plan donné (P') est parallèle à la plus courte distance AA', le lieu est encore un paraboloïde hyperbolique, et dans ce cas il contient, outre D et D', la plus courte distance AA', car son équation est vérifiée par $z = o$, $x = o$, quel que soit x.

Quand C ou B est nul, c'est-à-dire quand le plan (P') est parallèle à D ou à D', le lieu change de nature. Si l'on suppose par exemple $C = o$, son équation se réduit à

$$Ax^2 + Bxy + Bay - Aa^2 = o,$$

équation qui se décompose ainsi

$$(x + a)(By + Ax - Aa) = o,$$

et qui montre que le lieu est formé du système de deux plans.

Le premier, $(x + a) = o$, parallèle au plan des yz, passe par la droite D'.

Le second, $By + Ax - Aa = o$, parallèle au plan donné $Ax + By + D = o$, passe par la droite D.

Enfin, quand on a en même temps $C = o$, $B = o$, c'est-à-dire lorsque le plan (P') est parallèle à D et à D', le lieu se compose de deux plans parallèles, car son équation se réduit à $x^2 - a^2 = o$. C'est le système de deux plans menés respectivement par D, D' et parallèles à (P').

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME Ier, 2e SÉRIE.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Coniques planes.

Géométie analytique.

Trigonométrie plane et sphérique.

Probabilités.

Géométrie pratique.

Mécanique.

Analyse infinitésimale.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(*) Décédé à l'Ecole au mois de novembre.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les vingt premiers volumes de la première série et dans le premier de la deuxième.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES; par M. *Saint-Loup*. Mallet-Bachelier; in-8° de 150 pages. Prix : 4 fr.

Outre les Traités ordinaires d'Algèbre destinés surtout à démontrer et à coordonner les matières de l'enseignement, on conçoit d'autres ouvrages composés pour les calculateurs plutôt que pour les candidats, offrant en peu de pages les procédés les plus simples dans les circonstances que la pratique peut offrir, et qui, sans négliger complétement la théorie, ne s'astreignent pas à démontrer tous les théorèmes sur lesquels on s'appuie. Plusieurs écrits, sous différents titres, ont été publiés dans cette intention, un entre autres, fort estimable, par M. Vieille : c'est à cette classe d'ouvrages qu'appartient celui de M. Saint-Loup.

Le premier livre traite de fonctions d'une seule variable : on sait, en effet, que les éléments du calcul des dé-

rivées, c'est-à-dire du calcul différentiel, sont indispensables pour la théorie des équations.

Le second livre contient plusieurs considérations sur les racines en général, et le troisième, qui est le plus important de tous, est consacré à la résolution des équations numériques. L'auteur commence par considérer celles qui peuvent être résolues directement, et d'abord les équations du second degré : il ne leur applique d'autre procédé de calcul que l'emploi des Tables trigonométriques, dont l'usage n'est peut-être pas aussi avantageux ici qu'avec les équations du troisième et du quatrième degré. Mais il semble croire que, dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la petitesse du coefficient a, relativement aux deux autres, suffit pour négliger $\frac{ax^2}{b}$ dans la relation

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b},$$

afin d'obtenir x par des approximations successives: M. Gerono a fait voir que les valeurs consécutives ainsi obtenues s'écartaient quelquefois de la racine cherchée, comme dans l'équation

$$0,001\,x^2 + x - 10000 = 0.$$

(*Nouvelles Annales*, 1857, p. 436 et suiv.)

Pour l'élimination entre deux équations du second degré à deux inconnues, l'auteur emploie la méthode des sécantes communes qui se trouve dans les Traités modernes de Géométrie analytique, et il cite avec raison le perfectionnement dû à M. Transon, qui permet de reconnaître dans quelles circonstances deux sécantes com-

munes donnent ou non des points réels ; mais l'on pourrait aussi se demander, comme le fait M. Transon lui-même (*Nouvelles Annales*, 1860, p. 47), si cette méthode est la meilleure pour la pratique.

Quant aux racines commensurables, l'auteur commence par ramener l'équation donnée à une autre dont le premier terme ait l'unité pour coefficient. Ce procédé donne plus de régularité à la marche du calcul, mais conduit souvent à une équation dont le dernier terme est très-considérable, ce qui nécessite beaucoup d'essais.

Les racines incommensurables étant séparées par les théorèmes de Descartes et de Sturm, on approche indéfiniment de leur valeur par la méthode de Newton ou par celle des parties proportionnelles, et l'auteur observe, comme l'avait déjà fait M. Briot, que la racine est toujours comprise entre les résultats de ces deux méthodes.

Le quatrième et dernier livre renferme la théorie des différences, les méthodes d'interpolation de Newton et de Lagrange, et diverses observations curieuses et importantes sur le calcul des équations qui contiennent, parmi leurs coefficients numériques, un coefficient arbitraire. Ces considérations conduisent l'auteur à terminer par plusieurs Tables contenant des résultats numériques fort utiles dans une foule de calculs.

Ce qu'il faut surtout signaler dans cet ouvrage, c'est le fréquent emploi que fait l'auteur du tracé graphique des courbes, comme auxiliaire du calcul, pour séparer les racines dans les équations algébriques ou transcendantes, et même pour avoir une première idée de leur grandeur. En effet, les calculateurs savent combien d'essais inutiles et même de bévues cette méthode peut leur éviter, et ils trouveront un excellent guide chez M. Saint-Loup, qui, du reste, connaît trop bien les avantages des procédés graphiques pour en ignorer les inconvénients ; aussi met-

il le lecteur en garde contre les difficultés que leur usage peut présenter.

CH. HOUSEL,
Professeur.

ELÉMENTS D'ALGÈBRE (deuxième partie) ; par MM. *Dieu* et *Tarnier*. Paris, Hachette, 1860 ; in-8° de 350 pages.

On peut demander à un Traité d'Algèbre, d'abord de satisfaire aux exigences de la science elle-même par l'ensemble du plan et la précision des détails, ensuite de préparer les candidats à toutes les épreuves des examens, et enfin, ce qui a bien aussi son importance, de guider le calculateur dans toutes ses opérations : nous ne craignons pas de dire que ces conditions sont remplies dans l'ouvrage de MM. Dieu et Tarnier.

Nous n'insisterons pas sur l'analyse de ce Traité, qui est toute faite par les programmes bien connus du lecteur ; il suffira d'indiquer les parties qui nous ont paru mériter une attention particulière.

Les auteurs disent qu'un nombre est incommensurable quand il n'est ni entier ni fractionnaire : cette définition nous semble la seule vraie, car le nombre incommensurable est la généralité, le nombre commensurable est l'exception.

Dans la théorie de la division algébrique, les signes auxquels on reconnaît si l'opération est possible sont indiqués avec beaucoup de soin et d'une manière complète.

Quand il ne s'agit que de calculs numériques, les auteurs ne s'arrêtent pas à des subtilités inutiles ; c'est ainsi qu'ils démontrent la méthode d'interpolation de Lagrange par les coefficients à déterminer : mais ils n'oublient pas combien la rigueur est nécessaire dans les théo-

rèmes fondamentaux, tels que celui où l'on trouve $\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$, pour m infini. C'est même, si nous osons le dire, la première fois que nous voyons une démonstration complétement satisfaisante de ce résultat pour m positif ou négatif, entier ou fractionnaire ; cependant elle ne perd pas en simplicité ce qu'elle gagne en exactitude.

On remarquera aussi, à propos des séries, la manière dont on trouve la limite de l'erreur, même quand tous les termes sont de même signe : nous signalerons encore la démonstration de la série de Maclaurin (*).

C'est la première fois, du moins à notre connaissance, que l'on a introduit dans un ouvrage classique les théorèmes sur les valeurs de $f(\pm 1)$ pour diminuer le nombre des essais dans la recherche des racines commensurables. Nous croyons avec les auteurs qu'il est plus simple d'appliquer directement cette recherche à l'équation donnée, que de réduire à l'unité le coefficient du premier terme.

Dans la partie de l'ouvrage où l'on traite des racines incommensurables, nous indiquerons en particulier la manière parfaitement nette dont est exposée la méthode ordinaire de Newton : on sait que cette question est une de celles qui se présentent le plus souvent dans les examens. Ici l'on emploie les courbes comme auxiliaires de la théorie ; souvent aussi leur description graphique sert à la pratique des calculs.

Il nous reste à dire que cet ouvrage contient un nombre considérable d'exemples bien choisis et de toute espèce pour les calculs algébriques et numériques, les uns développés, les autres comme exercices : nous signalerons sur-

---

(1) Cette série appartient à Stirling.

tout plusieurs problèmes sur les maxima et minima; on sait, en effet, qu'il est difficile de trouver des questions de ce genre dont la solution ne soit pas évidente à priori, et les élèves n'aiment pas faire de longs calculs pour parvenir à un résultat trop facilement prévu.

En résumé, nous croyons que ce Traité peut être aussi utile qu'aucun autre aux candidats pour le succès de leurs examens et en même temps pour leur instruction sérieuse.

Ch. Housel,
Professeur.

SUR LE RAPPORT D'ADRIEN METIUS;

Par M. PROUHET.

Dans l'*Histoire des recherches sur la quadrature du cercle*, par Montucla, p. 58 de l'édition de Lacroix, on lit le passage suivant sur l'inventeur du rapport $\frac{355}{113}$: « Ce Metius n'est pas *Adrianus Metius*, mathématicien connu au commencement du XVIIe siècle et frère de Jacques Metius, réputé l'inventeur du télescope; c'est *Pierre Metius*, le père de l'un et de l'autre, mathématicien des États de Hollande et qui vivait à la fin du XVIe siècle. Je ne fais cette observation que parce que j'ai remarqué qu'on se trompait généralement en attribuant au fils cette invention que lui-même revendique pour son père dans ses ouvrages. »

On peut dire que Montucla a eu la main malheureuse dans cette prétendue rectification, car, en croyant relever une erreur, il a combattu une dénomination exacte et accrédité une erreur que les auteurs des Traités élémen-

taires, auxquels on ne peut pas reprocher d'abuser de noms propres, se sont empressés de propager. Comme on l'a vu par la savante Notice insérée dans ce Bulletin (t. VII, p. 51), le père d'Adrien Metius s'appelait Adrien et non Pierre. Suivant Lalande (*Bibliographie astronomique*, p. 201), l'erreur de Montucla vient de ce qu'il a cru que l'abréviation P. M., employée par le fils, signifiait Petrus Metius, tandis qu'elle veut dire *Piæ Memoriæ*. Montucla renouvelait ainsi la méprise de cet antiquaire qui traduisait par *Publius Aulus Gellius* l'inscription moderne P. A. G, signifiant en bon français : *Prenez à gauche*.

Le rapport $\frac{355}{113}$ a été donné pour la première fois par Metius le père dans un petit livre (*libellum*) consacré à la réfutation d'une prétendue Quadrature du Cercle de Simon Duchène. Cet ouvrage semble perdu, et nous ne le connaissons que par quelques citations du fils. Le professeur de Franequère nous apprend que son père, *geometra insignis*, a suivi la méthode d'Archimède (*), et qu'il a trouvé que le rapport véritable était compris entre $\frac{377}{120}$ et $\frac{333}{106}$ dont la moyenne est $\frac{355}{113}$. On voit que la moyenne a été obtenue en ajoutant les deux premières fractions terme à terme. Les deux limites $\frac{377}{120}$ et $\frac{333}{106}$ ont pu être trouvées en calculant deux polygones de plus qu'Archimède, tandis que le rapport $\frac{355}{113}$ exigerait le calcul d'un polygone de 10240 côtés au moins.

Je n'ai pas rencontré dans la *Pratique d'Arithmétique*

(*) Archimedeis demonstrationibus invenit. *Arithmeticæ et geometriæ practica. Franequeræ*, 1611 ; in-4.

et de Géométrie l'abréviation P. M. citée par Lalande : elle se trouve sans doute dans une édition postérieure, d'où il faudrait conclure qu'en 1611 Metius le père vivait encore.

SIGNALEMENT PHYSIQUE ET MORAL DE LEIBNIZ.

On lit ce signalement, donné par Leibniz même, dans l'ouvrage suivant :

Leibnizens geschichtliche aufsatze und gedichte aus den handschriften der Koniglichen Bibliothek zu Hannover. Herausgegeben von Georg. Heinrich Pertz.

« Dissertations historiques et poésies de Leibniz, éditées d'après les manuscrits de la bibliothèque royale de Hanovre, par George-Henri Pertz. Hanovre, 1847 ; in-8 de 386 pages. »

Leibniz a commencé un journal autobiographique le 3 août 1696.

Voici son signalement tracé par lui-même :

Taille moyenne. Figure pâle. Mains froides. Pieds et doigts longs. Cheveux d'un brun foncé, droits et non frisés. Vue basse dès l'enfance. Corps maigre. Voix mince, mais claire, haute plutôt que forte. Difficulté de prononcer les gutturales et le *k*.

Aimant les odeurs fortes, les spiritueux ; les choses sucrées et le sucre. Ayant l'habitude de mettre du sucre dans son vin.

N'est jamais ni trop gai, ni trop triste.

Se passionne promptement en pensées et en paroles et peut à peine se modérer, mais devient bientôt calme et doux.

Goût médiocre pour la conversation ; mais la préférant aux jeux de cartes et aux exercices qui exigent du mouvement.

Menant et aimant de préférence une vie sédentaire.

Souriant plus souvent que riant.

Colère prompte et courte.

Commençant une entreprise avec hésitation et la continuant ferme, avec persévérance.

Mémoire médiocre (*).

Plus affecté d'un petit mal présent que d'un grand mal passé.

Le journal, écrit en latin, langue universelle, est moins intéressant qu'on n'avait droit de l'espérer. Ce qu'il dit de sa mémoire ne s'accorde pas avec ce qu'on raconte de sa manière de travailler. En lisant un ouvrage, il prenait des notes, les écrivait sur de petits carrés de papier qu'il jettait au fur et à mesure dans un grand panier placé à côté de lui ; et cela suffisait pour fixer le fait dans sa mémoire ; jamais il ne consultait le contenu du panier (**).

A la page 165, on lit :

Leibniziorum sive Lubeniezio rum nomen slavonicum ; familia in Polonia.

Je crois avoir lu quelque part qu'il avait une loupe sur la tête.

Né en 1646, il est mort le 14 novembre 1716, âgé de soixante-dix ans, ayant perdu la faveur de son souverain, l'électeur de Hanovre, devenu roi d'Angleterre. Son convoi eut lieu la nuit à minuit et était composé d'un seul individu, d'un pauvre juif, nommé Raphael Lévy, son disciple (voir *Nouvelles Annales*, t. XII, p. 418).

(*) C'est l'opinion personnelle de Leibniz, à laquelle on souscrira difficilement.

(**) Mémoire prodigieuse.

SUR LES DÉNOMINATIONS DE GÉOMÉTRIE ET D'ALGÈBRE SUPÉRIEURES.

Pour étudier la géométrie dite *supérieure*, il suffit de connaître les quatre premiers livres de Legendre ; pour étudier l'algèbre dite *supérieure*, il suffit de connaître la résolution des équations du premier degré. Ces faibles connaissances, qui font parvenir à de si beaux et si utiles résultats, constituent même le mérite de ces sciences. Mais pourquoi leur donner des noms, des épithètes qui peuvent suggérer l'idée que pour acquérir ces sciences il faut posséder le calcul des variations ou les ardues théories arithmologiques. Il ne faut pas croire que les dénominations sont indifférentes. Consultons Pascal. « Une » des raisons principales qui éloignent ceux qui entrent » dans les connaissances, du véritable chemin qu'ils doi- » vent suivre, est l'imagination qu'on prend d'abord, » que les bonnes choses sont inaccessibles, en leur don- » nant le nom de grandes, hautes, élevées, sublimes. » Cela perd tout. Je les voudrais nommer basses, com- » munes, familières. » (*Pensées.*)

Ne nous arrêtons pas sur ces noms qui décèlent l'esprit d'exagération que l'illustre penseur portait sur toutes choses, même sur l'amour et la crainte de Dieu (*).

(*) Euler est mort à soixante-seize ans, fumant sa pipe et jouant avec un de ses nombreux petits-enfants qu'il tenait sur ses genoux ; Pascal est mort à trente-neuf ans, célibataire et en désespéré. C'est que le géomètre suisse avait de Dieu une idée très-juste, mais le géomètre français, avec tout le parti janséniste, une idée complétement fausse. Leur dieu est un tyran et non un père miséricordieux indulgent pour les faiblesses humaines.

Il me semble que chaque science devrait être désignée par son procédé principal, le plus habituel. Or la géométrie supérieure emploie habituellement des propriétés de segments, car les théorèmes fasciculaires sont encore de telles propriétés sous un autre aspect. Le nom convenable paraît donc être *géométrie segmentaire*. De même l'algèbre supérieure fait habituellement emploi des *propriétés* des équations algébriques; le nom convenable paraît donc être *algèbre équationnelle*. Si l'on ne veut pas de cet *adjectif* non usité, on pourrait l'appeler très-convenablement *théorie générale des équations et fonctions algébriques*.

Quelqu'un parla à Bernoulli (Jean) de fonctions *hypertranscendantes*. Pourquoi *hyper* plutôt que *hypo*? lui demanda malicieusement l'illustre promoteur du calcul intégral.

L'épithète *supérieure*, si l'on veut s'en servir, ne devrait s'appliquer qu'aux sciences qui invoquent le secours du calcul infinitésimal, des propriétés fonctionnelles, des propriétés arithmologiques.

Cette même épithète s'applique d'ailleurs parfaitement au génie géométrique de M. Chasles, à l'esprit analytique de M. Serret, de l'Institut.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Mécanique de Sturm, publié d'après le vœu de l'Auteur par *M. Prouhet*, répétiteur à l'Ecole Polytechnique. 2 vol. in-8, avec figures dans le texte, 1861 (chez Mallet-Bachelier). — Prix : 12 fr.

La Mécanique rationnelle est une science toute moderne : ses principes essentiels, la composition des mou-

vements, la mesure des forces accélératrices, sont dus à Galilée (*). Ces premières notions ont été agrandies et développées par Newton dans les deux premiers Livres des *Principes*. Les successeurs de ces grands hommes, notamment Euler et d'Alembert, ont fait rentrer la mécanique dans le domaine de l'analyse et généralisé, en les commentant, les méthodes employées avant eux. Enfin Lagrange, en introduisant dans la formule qui est l'expression du principe des vitesses virtuelles, les équations de condition, par l'emploi des multiplicateurs indéterminés, a résumé tous les principes en un seul. Il est vrai que pour remplir cet objet il a dû faire usage de la méthode des variations, pour le cas où les équations de condition sont relatives à tous les éléments d'une courbe, d'une surface ou d'une masse.

Les travaux de cette glorieuse succession de géomètres ont fourni depuis le commencement de ce siècle la substance de l'enseignement de la mécanique rationnelle dans les Facultés et à l'Ecole Polytechnique. Exposée par d'habiles professeurs, cette science a pris dans leurs leçons des formes plus simples et mieux arrêtées, et M. Poinsot surtout l'a perfectionnée, en faisant connaître la mesure et la composition d'une force négligée (**) avant lui. Aussi les textes élémentaires qui se recommandent à plus d'un titre sont nombreux, et le Cours de Sturm, que M. Prouhet vient d'éditer, prend sa place à côté d'ouvrages justement estimés. Mais sans établir de comparaison entre des œuvres d'un caractère et d'un cachet tout à fait différents, nous croyons pouvoir affirmer

(*) M. Barthélemy Saint-Hilaire, dans son travail sur la Physique d'Aristote, explique avec clarté les opinions de ce philosophe sur le mouvement; il y distingue la *quantité* et la *qualité*, distinction que Galilée a fait disparaître dans ses célèbres *Dialogues*. TM.

(**) Cette force a toujours été employée sous le nom de *moment*. Avoir converti le moment en force est un trait de génie de Poinsot. TM.

que le nouveau Traité ne sera effacé par aucun livre connu. Sturm a enseigné longtemps la Mécanique à la Sorbonne et à l'Ecole Polytechnique; ses Leçons, perfectionnées chaque année, présentent un corps de doctrine, dans lequel se retrouvent à un degré supérieur les qualités qui distinguent son *Cours d'Analyse*.

La Mécanique rationnelle est la branche la plus difficile des Mathématiques appliquées; ses principes ne peuvent être saisis sans une application soutenue, et ils ont souvent donné lieu à des équivoques ou à de fausses interprétations. Sturm avait médité avec profondeur la partie philosophique de la science, et il avait puisé avec sagacité dans les sources originales, dans Euler par exemple, qu'il aimait à citer pour la clarté qu'il a répandue sur les notions fondamentales dans son Traité de Mécanique.

En lisant le nouveau Traité, on pourra souvent remarquer dans les énoncés, dans les définitions, une phrase incidente, un mot, qui ne se trouvent pas ailleurs, et qui donnent au sens des propositions une précision inattendue. Nous ne citerons pas une foule de calculs élégants que Sturm a répandus dans son livre, dont la rédaction est si simple et si logique, que sa lecture toujours instructive ne fatigue jamais l'esprit. Dans le premier volume nous signalerons les chapitres relatifs à l'attraction et au système du monde, qui sont rédigés avec beaucoup de soin et très-convenablement développés. Dans le second volume, la théorie des couples, qui est une partie importante de la Mécanique et non la Mécanique tout entière, est présentée avec des détails suffisants pour mettre le lecteur au courant des travaux que Poinsot a publiés dans les dernières années de sa vie. Mais l'exposition des principes généraux et de la théorie de la rotation, dont les lecteurs des *Nouvelles Annales* (t. X, p. 419; 1851) ont pu lire un fragment dans ce recueil, constituent les parties essentielles et originales de ce second volume.

Nous mentionnerons d'une manière spéciale les chapitres relatifs aux forces vives, qui nous paraissent plus complets et plus lumineux que tout ce qui a été publié jusqu'à ce jour sur cet important sujet.

On sait que lorsqu'une force d'impulsion communique à une masse m une vitesse v, cette force a pour mesure le produit mv. Or dans la Mécanique appliquée on emploie les forces dont on peut disposer pour donner certaines vitesses à des masses inertes, telles que des volants, des roues, des pistons, etc. Les quantités de mouvement acquises par ces masses sont en général consommées par des résistances continues qui peuvent être considérées comme équivalentes à la résistance produite par un poids. Lorsqu'on l'élève verticalement à une certaine hauteur, le produit abstrait d'un poids par la hauteur à laquelle on l'élève est la mesure du travail, et il est important de savoir ce que la consommation de la quantité de mouvement par la gravité représente de travail. Or si la masse m a une vitesse v ascendante et verticale, elle s'élèvera en vertu de cette vitesse à une hauteur $\frac{v^2}{2g}$; mais, en s'élevant librement, cette masse sollicitée par l'action de la pesanteur devient un poids mg, et le travail fourni, pour que la quantité de mouvement mv soit détruite, est visiblement $mg \times \frac{v^2}{2g}$ ou $\frac{mv^2}{2}$. Une masse mk, animée d'une vitesse $\frac{v}{k}$, bien que possédant une quantité de mouvement mv, ne fournirait que le travail $\frac{mv^2}{2k}$ (*); il est donc bien évident que des quantités de mouvement égales ne produisent pas, lorsqu'elles sont détruites par l'action continue de la gravité, un travail identique. D'où résulte l'importance de combiner dans les machines en mouvement les

(*) La force vive est ce qui se paye, a dit Mongolfier, C'est l'idée la plus claire qu'on ait donnée de cette expression. Tm.

masses et les vitesses de manière à obtenir le plus grand travail possible.

Les premiers géomètres qui ont eu quelques notions exactes sur le choc des corps dépourvus d'élasticité, ont remarqué que si deux masses animées de vitesses de même sens et de même direction se choquent, les quantités de mouvement totales restent les mêmes avant et après la collision, mais que les forces vives diminuent. Comme d'ailleurs ils n'avaient pas de règles précises pour estimer dans tous les cas cette perte de force vive, leurs ouvrages les plus estimés (l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, par exemple) contiennent sur ce sujet des erreurs très-graves. Carnot (*), en donnant le premier une forme simple à l'expression de la force vive perdue par suite du choc, a porté la lumière sur une question difficile et a rendu un service réel à la Mécanique appliquée. On doit cependant convenir que les notions que nous possédons sur le phénomène du choc ont quelque chose de vague et d'obscur qui rejaillit sur le théorème énoncé par Carnot. Sturm évite ces difficultés, et il généralise la conception de ce savant en la faisant rentrer dans le domaine de la Mécanique analytique. Au lieu de considérer à un instant donné du mouvement un choc entre deux ou plusieurs masses du système, il suppose que des liaisons nouvelles, analytiquement exprimables, existent entre tous ou quelques-uns de ses points, et il démontre que dans cette hypothèse les vitesses des diverses masses éprouvent des changements brusques, et que de ces changements résulte une perte de force vive qu'on peut estimer par un procédé semblable à celui de Carnot; des liaisons nouvelles entre les corps du système peuvent d'ailleurs être introduites à diverses époques du mouvement et produire

(*) Carnot (Lazare-Nicolas-Marguerite), né à Nolay (Côte-d'Or) le 13 mai 1758, mort en exil à Magdebourg le 2 août 1823. Tm.

une succession de pertes de forces vives aisément calculables. Les théorèmes de Coriolis sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs, le théorème de M. Delaunay sur la force vive maximum autour de l'axe instantané, dans le cas de la rotation d'un solide autour d'un point fixe, se présentent naturellement comme des corollaires du théorème général de Sturm, que la postérité placera à côté des titres immortels de sa gloire. Ce fragment, placé à la fin du second volume, est écrit avec une grande clarté; le savant éditeur, qui l'a conservé sous une forme complète, a consulté, pour le rédiger, les papiers et les notes marginales qui sont restés de l'illustre géomètre si prématurément enlevé aux sciences. Le volume est terminé par une leçon sur la théorie du pendule simple, en ayant égard au mouvement de la terre, professée par Sturm à la Sorbonne et rédigée par M. Puiseux.

Pour remplir les lacunes que laissait le texte de l'auteur et compléter des indications ou des notes inachevées, sans changer le style et la manière du maître, il a fallu non-seulement de l'application et du dévouement, mais aussi de la sagacité. Ces conditions se sont trouvées réunies dans le savant éditeur du nouveau Traité, qui, en restant fidèle au vœu exprimé par un ami, a conservé à l'enseignement ces excellents livres d'Analyse et de Mécanique où l'on reconnaît le cachet du génie simple et original qui les a créés.

M. Prouhet a eu l'heureuse idée de résumer d'une manière succincte, à la fin de chaque volume, les Leçons développées dans le Traité. Ce résumé substantiel peut être utile à l'élève qui, en vue d'un examen, désire parcourir en quelques jours l'ensemble de la science, ou au géomètre qui veut retrouver en peu de temps un théorème ou une notion effacée de sa mémoire. E. Brassinne.

NOTIZIE DEGLI SCRITTORI BOLOGNOSI RACCOLTE DA GIOVANNI FANTUZZI. In Bologna MDCCLXXXI-MDCCXC. Nella stamperia di San Thommaso d'Aquino. Con licenza de' Superiori. (Huit tomes in-4; t. V, p, 324.)

DAL FERRO SCIPIONE.

Scipione di Floriano dal Ferro o Ferreo cominciò a leggere Aritmetica e Geometria nel nostro studio l'anno 1496 (*) e prosegui fino all'anno 1525 e forse mori in questo tempo non vedendosi più descritto ne' Rotoli.

Quantunque questi nulla abbia lasciato di scritto, nulladimeno è illustre e degno di ricordanza per essere stato l'inventore, al dire del Cardano (**), di un caso particolare delle equazioni cubiche che gli Algebristi spiegano

---

(*) *Die 23 decembris 1496.*

Item per omnes fabas albas constituerunt Scipioni Floriani a Ferro Rotulato ad Arithmeticam et Geometriam libras viginti quinque bon. pro ejus salario quolibet anno integras et privilegiatas, etc. Ex Lib. Act. Archiv. Secret. Senatus.

E ne' Rotoli dello studio dell'anno 1507 si vede essere ingiunto a Lettori della classe di Aritmetica e Geometria : *Cum hoc quod quilibet gratis doceat quatuor pauperes ex verecundis. Prout ab eorum procuratoribus commissum fuerit.* Di presente il maestro pubblico di Aritmetica è descritto ne' pubblici Rotoli fra stipendiati dello studio con l'obbligo d'insegnare l'Aritmetica gratis a tre scolari.

Il salario di Scipione dell'anno 1510 era cresciuto fino alle lire cento, nel qual' anno gli fu aumentato di lire 25.

Die 27 martii 1510.

Item per vigenti fabas albas et septem nigras Scipioni de Ferro conducto ad Arithmeticam et Geometriam cum salario librarum centum bonon. quolibet anno decreverunt, ut de cetero in qualibet distributione facienda poni debeat pro quantitate librarum vigentiquinque adeo quod quolibet anno percipiat libras centum integre incipiendo in hac prima distributione præsentis anni, in qua poni debeat, et describi per libras 25 quasi sit de pti percepturus, etc. Ex Lib. di. Arch. Secreti Senatus.

(**) *De arte Magna.*

$x^3 + px = q$ e allora fù detto *Capitolo di cosa e cubo*, la quale scoperta il Ferro confidò a Maria Antonio dal Fiore o Florico suo scolaro, che invanito di questo secreto ebbe poi tante contese con Niccolò Tartaglia, come può vedersi nel Montucla (*), Tiraboschi (**) ed altri (***).

Di questo Aritmetico disse l'Achillini (****) lodando gli Architetti, i Geometri, gli Aritmetici, e gli Astrologi del suo tempo :

Architettor fra gli altri, e Geometri
Gian Bervaldo, et facil Malchiavello
Pono un altro excellente in questi metri
Dino Arofeno, e quel di cui favello
Non voglio lo Aritmetico se aretri
GLIÈ SCIPIO, et è Prospetto il suo fratello.
Astrologo, e il Benazzo, il mio Vitale
Il Castagnolo in Cosmographia vale, ec.

(COMMUNIQUÉ PAR M. LE PRINCE BONCOMPAGNI.)

FONCTIONS HOMOGÈNES ENTIÈRES.

I. M. Otto Hesse (*****), le célèbre professeur de l'Université de Heidelberg vient de publier à Leipzig, chez l'in-

---

(*) *Histoire des Mathématiques*, t. Ier, p. 379.

(**) Tiraboschi, *Istoria della Lett. Ital.*, t. VII, p. 415.

(***) Ne parla l'Alidosi a *Dottori Artisti;* Leandro Alberti, *Descriz. d'Italia;* Bumaldi, *Bibliot.;* Orlandi ed altri.

(****) Nel suo *Viridario*.

(*****) Ludwig-Otto Hesse, né à Konigsberg (Prusse) le 12 avril 1811, disciple de Jacobi, professeur ordinaire à l'Université de Heidelberg depuis 1857.

telligent et libéral Teubner un ouvrage allemand : voici la traduction du titre : *Leçons sur la Géométrie Analytique de l'espace et particulièrement sur les surfaces du second degré.* 1861. In-8° de 368 pages; 14 pages de table des matières : en tout 29 leçons élémentaires et quelquefois trop élémentaires; production digne de l'auteur. Quelques leçons atteignent une certaine hauteur.

Nous donnons comme spécimen la huitième leçon, dont le contenu ne saurait être trop propagé, à cause de la fécondité de ses applications géométriques. Aussi nous n'épargnons pas les explications, dût-on les trouver minutieuses.

Notation et théorème d'homogénéité.

II. Soit

$$f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

une fonction homogène entière de $n+1$ variables et de degré p; remplaçant x_τ par tx_n, t étant une constante quelconque, la fonction (1) devient

$$t^p f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_0 t, x_1 t, \ldots, x_n t), \tag{2}$$

et réciproquement lorsque la fonction (1) satisfait à l'équation (2), elle est homogène entière et de degré p. Prenons la différentielle de l'équation (2) par rapport à t et faisant dans le résultat $t = 1$, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} pf(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= x_0 f'(x_0) + x_1 f'(x_1) \\ &+ x_2 f'(x_2) + \ldots + x_n f'(x_n) \text{ (*)}; \end{aligned} \right. \tag{3}$$

(*) x_0 se présente aussi p fois dans le membre à droite. Exemple, $p = 2$:

$$x_0^2 + x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

ou

$$x_0(2x_0 + x_1 + x_2) + x_1(x_0 + 2x_1 + x_2) + x_2(x_0 + x_1 + 2x_2)$$
$$= 2(x_0^2 + x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2);$$

de même pour un degré quelconque.

une seconde différentiation, avec la même condition, donne

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{p(p-1)}{2} f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0 f''(x_0) \\ \quad + x_1 f''(x_1) + \ldots + x_n f''(x_n). \end{cases}$$

Nous ne pousserons pas ces différentiations plus loin, n'en ayant pas besoin.

M. Serret donne, dans son *Algèbre supérieure*, cette ingénieuse démonstration : Multiplions chaque variable par $1 + \omega$, on aura l'identité

$$\begin{gathered}(1+\omega)^{n+1}(x_0, x_1 \ldots, x_n) \\ = f[(1+\omega)x_0, (1+\omega)x_1, \ldots, (1+\omega)x_n];\end{gathered}$$

développant le membre à droite par le théorème de Taylor, on obtient successivement les équations (3), (4), etc.

Système de fonctions homogènes de divers degrés.

III. Soient

$$a^0, a^1, a^2, \ldots, a^n,$$

$n+1$ fonctions homogènes de $n+1$ variables x_0, $x_1, \ldots, x_n$ et respectivement de degré p_0, p_1, $p_2, \ldots, p_n$.

Symbole.

$$\frac{da^\lambda}{dx_\chi} = a^\lambda_\chi.$$

IV. On déduit de l'équation (3)

$$(5)\quad \begin{cases} p_0 a^0 = a^0_0 x_0 + a^0_1 x_1 + \ldots + a^0_n x_n, \\ p^1 a' = a^1_0 x_0 + a^1_1 x_1 + \ldots + a^1_n x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n a^n = a^n_0 x_0 + a^n_1 x_1 + \ldots + a^n_n x_n. \end{cases}$$

Déterminant.

V.

$$(6)\qquad A = \begin{vmatrix} a_0^1 + a_1^0 + \ldots + a_n^0 \\ a_0^1 + a_1^1 + \ldots + a_n^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0^n + a_1^n + \ldots + a_n^n \end{vmatrix}$$

VI. Résolvant les équations (5) comme un système d'équations linéaires $x_0, x_1, \ldots, x_n$, alors la valeur d'une quelconque $x_\varkappa$ de ces variables sera

$$(7)\qquad A x_\varkappa^1 = A_\varkappa^0 p_0 a^0 + A_\varkappa^1 p_1 a^1 + \ldots + A_\varkappa^n p_n a^n$$

ou symboliquement

$$A_\varkappa^\lambda = \frac{dA}{dx_\varkappa^\lambda}.$$

Cette équation (7) est le pivot de tout ce Mémoire.

VII. Différentiation de l'équation (7) par rapport à $x_\varkappa$ et ensuite par rapport à $x\lambda$:

$$(8)\qquad A + \frac{dA}{dx^\varkappa} x^\varkappa = A_\varkappa^0 p_0 a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 p_1 a_\varkappa^1 + \ldots + A_\varkappa^n p_1 a_\varkappa^n,$$

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dA}{dx_\lambda} x_\varkappa = A_\varkappa^0 p_0 a_\varkappa^0 + A_\varkappa^1 p_1 a_\lambda^1 + A_\varkappa^n p_1 a_\lambda^n \\ &+ \frac{dA_\varkappa^0}{dx^\lambda} + p_0 a^1 \frac{dA_\varkappa^1}{dx^\lambda} p_1 a^1 + \ldots + \frac{dA_\varkappa}{dx^\lambda} p_n a^n. \end{aligned} \right.$$

La théorie des déterminants donne

$$(10)\qquad 0 = A_\varkappa^0 a_\lambda^0 + A_\varkappa^1 a_\lambda^1 + \ldots + A_\varkappa^n a_\lambda^n;$$

multipliant cette équation par p_0 et retranchant le résultat de (8), il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & A(1-p_0)+\frac{dA}{dx_\varkappa}x^\varkappa = A^0_\varkappa(p_1-p_0)a^1_\varkappa+\ldots \\ & +A^n_n a^n_n(p_n-p_0)+\frac{dA^0_\varkappa}{dx_\varkappa}p_0a^0+\frac{dA^1_\varkappa}{dx_\varkappa}p_1a^1_\varkappa+\ldots+\frac{dA^n_\varkappa}{dx_\varkappa}p_np^n; \end{aligned}\right.$$

retranchant l'équation (9) multipliée par p_0 de (9), il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{dA}{dx_\lambda}x^\varkappa = A^1_\varkappa a^1_\lambda(p_1-p_0)+\ldots+\frac{dA^n_\varkappa}{dx_\lambda}a^n_\lambda(p_n-p_0) \\ & +\frac{dA^0_\varkappa}{dx_\lambda}p_0a^0+\frac{dA'_\varkappa}{dx_\lambda}p_1a^1+\ldots+\frac{dA^n_\varkappa}{dx_\lambda}p_na^n. \end{aligned}\right.$$

Théorème I. — *Si un certain système de valeurs de $n+1$ variables fait disparaître les $n+1$ fonctions $a^0, a^1, \ldots, a^n$, ce même système fait disparaître le déterminant A de ces fonctions, conséquence de* (7).

Mêmes conditions qu'au théorème précédent.

On a les équations non identiques

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{dA}{dx_\varkappa}x_\varkappa = A^1_\varkappa a^1_\varkappa(p_1-p_0)+\ldots+A^n_\varkappa a^n_\varkappa(p_n-p_0), \\ & \frac{dA}{dx_\lambda}x_\varkappa = A^1_\varkappa a^1_\lambda(p_n-p_0)+\ldots+A^n_\varkappa a^\lambda_n(p_n-p_0), \end{aligned}\right.$$

Si $p_0=p_1=p_2=\ldots=p_n$, on a ce théorème :

Théorème II. — *Si $n+1$ fonctions homogènes entières de même degré disparaissent par un certain système des $n+1$ variables, les déterminants de ces fonc-*

tions disparaissent également et aussi les premiers quotients différentiels partiels.

Si $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = p_{n-1}$, de sorte qu'un seul degré, savoir p_n, n'est pas égal aux autres, on a

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{dA}{dx_\varkappa} = a^n_\varkappa A^n_\varkappa \dfrac{(p_n - p_0)}{x^\varkappa}, \\ \dfrac{dA}{dx_\lambda} = a^n_\lambda A^n_\varkappa \dfrac{(p_n - p_0)}{x_\lambda}. \end{cases}$$

Ces équations démontrent le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si $(n+1)$ fonctions homogènes entières d'autant de variables de n fonctions de même degré et $(n+1)$ de ces fonctions disparaissent par un système de valeurs des variables, alors pour ce même système des variables les quotients différentiels partiels du déterminant de ces $n+1$ fonctions sont proportionnels aux quotients différentiels partiels correspondants de la fonction inégale.*

On déduit aussi facilement des équations (12) :

THÉORÈME IV. — *Si pour $n+1$ fonctions homogènes entières $a^0, a^1, \ldots, a^n$, d'autant de variables, les fonctions $a^0, a^1, \ldots, a^{n-1}$ de même degré disparaissent simultanément par un système de valeurs des variables, on a pour le même système les équations*

$$\frac{dA}{dx_\lambda} = l_m \frac{da^m}{dx_\lambda} + l_{m+1} \frac{da^{m+1}}{dx_\lambda} + \ldots + l_n \frac{da^n}{dx_\lambda},$$

dans lesquelles les expressions $l_m, l_{m+1}, \ldots, l_n$, sont indépendantes des valeurs particulières de λ.

VIII. — M. O. Hesse fait observer que ces quatre théorèmes ramènent l'élimination entre deux équations de

degré supérieur à l'élimination des inconnues entre des équations linéaires, tout comme les procédés de Bezout (*) et de M. Sylvester.

IX. Une application de ces quatre théorèmes : Quelles sont les conditions pour que les coordonnées homogènes de quatre points $(x_0 y_0 z_0 p_0)$, $(x_1 y_1 z_1 p_1)$, $(x_2 y_2 y_2 y_2)$, $(x_3 y_3 z_3 p_3)$, soient dans un même plan donné par l'équation

$$ux + vz + wz + rp = 0.$$

Ces conditions sont

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + rp_0 = 0,$$
$$ux_1 + vy_1 + wz_1 + rp_1 = 0,$$
$$ux_2 + vy_2 + wz_2 + rp_2 = 0,$$
$$ux_3 + vy_3 + wz_3 + rp_3 = 0.$$

On a quatre fonctions linéaires homogènes des variables u, v, w, r qui disparaissent pour un même système de ces valeurs. Donc le théorème (8) donne

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & p_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & p_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & p_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour des coordonnées rectangulaires, il suffit de faire $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) La méthode de Bezout est générale et s'applique à un nombre quelconque d'équations de degrés quelconques; mais il a malheureusement

déterminant auquel on peut donner la forme

$$-\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

et par une propriété connue des déterminants, cette expression prend la forme

$$-\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ 0 & x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

et encore

$$-\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

Consultez Baltzer, ouvrage récemment et très-bien traduit par M. Hoüel, le plus élémentaire et le plus rigoureux qu'on ait publié sur les déterminants et qui contient l'historique complet de cette théorie, indiquant les sources, au cachet germanique : auteur, tome, page, année. Baltzer s'élève avec raison contre l'extravagante profusion de nouvelles dénominations introduites par MM. Cayley, Schlafly, Sylvester, et qui donnent au langage mathématique l'air de la philosophie barbare du moyen âge. Leibniz a créé le monde infinitésimal avec ces deux mots, *différentiel*, *intégral*. Toutefois cette dernière dénomination est de son illustre disciple Jean Bernoulli. Leibniz se servait du mot *somme*.

---

expliqué son procédé avec si peu d'élégance, si peu d'ordre, que le procédé est resté inconnu.

Puisse cette traduction obtenir de la vogue. La librairie a besoin d'acheteurs, et malheureusement le nombre est bien petit en France. Dès que nous avons le droit d'enseigner, nous n'étudions que les livres officiels, *conformes.*

BIBLIOGRAPHIE

Sur les Astéroïdes, d'après M. *Lespiault,* professeur à la Faculté de Bordeaux.

Nous croyons devoir dire quelques mots de l'écrit intéressant et instructif concernant les Astéroïdes, que vient de faire apparaître M. Lespiault. Le mérite particulier de cet opuscule n'est pas seulement un complet développement historique de toutes les opinions et questions scientifiques qui ont occupé les astronomes depuis la première croyance à la possibilité d'un astre intermédiaire entre Mars et Jupiter, mais aussi l'esprit clair et philosophique qui le distingue. L'auteur commence par indiquer l'argument scientifique qui engagea Kepler à faire cette supposition. Nous voyons également ici que tous les grands événements dans le domaine des découvertes physiques ou intellectuelles se préparent petit à petit et naissent plutôt par un besoin depuis longtemps senti, dû à l'esprit du temps, que par le hasard ou par la réflexion d'un penseur qui devance son siècle. Nous pouvons même regarder des hommes tels que Kepler et Newton comme ayant heureusement réalisé les idées qui ont agité leur siècle, en leur imprimant par leur profond génie une marque immortelle. A l'histoire de la découverte et de ses phases les plus essentielles, M. Lespiault

rattache des conjectures sur l'origine possible de ces astres et sur la recherche sur la situation des points remarquables de leurs orbites. L'auteur trouve à l'aide de ses calculs que le petit nombre des propriétés communes ne suffit pas pour donner une indication sur leur mode de formation. L'exposé simple et impartial, écartant des hypothèses séduisantes, est digne d'éloges. Une bonne esquisse des méthodes qui ont été appliquées à la solution des différents problèmes physiques et la statistique du groupe des Astéroïdes terminent cet opuscule. Nous nous permettrons d'indiquer ici une légère rectification. Le savant directeur de l'observatoire de Vienne s'occupait non-seulement de rechercher la distance minimum des orbites planétaires, mais encore et principalement de leur lieu absolu dans l'espace; et il arrivait à ce but non pas en faisant la projection d'une orbite sur l'autre, ce qui aurait augmenté considérablement le travail, mais en les projetant toutes sur les plans de l'écliptique et du colure des équinoxes. En terminant ces lignes, nous ne pouvons nous empêcher de formuler le désir que de tels travaux se multiplient, car eux seuls popularisent la science et relèvent et forment l'esprit du temps, en mettant à la portée de tout le monde, sous une forme à la fois plastique et méthodique, le progrès du dogme abstrait.

MAURICE LOEWY (*),
Astronome attaché à l'Observatoire
impérial de Paris.

(*) Né à Vienne le 15 avril 1833. Pourquoi ne pas traduire en français le délicieux journal de Péters intitulé *Astronomie populaire ?* Ce serait plus religieux que d'entretenir le peuple mensuellement de mensonges sous le titre fallacieux de légendes, ou, ce qui est encore pis, de descriptions passionnées adressées à la jeunesse. Je n'ai pas pu trouver d'éditeurs pour cette entreprise, qui est hors de la sphère *conforme*. TM.

NICOLAI FATII DUILLERII, R. S. S., LINEÆ BREVISSIMI DESCENSUS INVESTIGATIO GEOMETRICA DUPLEX, cui addita est investigatio geometrica solidi rotundo in quo minima fiat resistentia. Londini, typis R. Everingham. Prostant apud Johannem Taylor, ad insignem Navis, in cœmeterii Divi Pauli. In-4 de 24 pages et 1 planche de 6 figures. MDCXCIX.

Ouvrage excessivement rare, qui fait honneur au génie géométrique éminent de l'auteur et contient malheureusement le germe de sa dispute avec Leibniz et le commencement de cette fatale polémique entre les Anglais et les Allemands au sujet de l'invention des nouveaux calculs, polémique si funeste aux Anglais.

Jean-Christian Fatio, frère de Nicolas, était aussi membre de la Société Royale de Londres (R. S. S.) et le premier qui ait mesuré la hauteur du mont Blanc. On possède une lettre de Nicolas à son frère.

Nicolas est né en 1664, au château de Duillier, situé près de Nyon (Vaud); on ignore la date précise de sa mort. On a de lui des dissertations astronomiques insérées au *Gentlemen's Magazine*.

Esprit insinuant, persuasif, il sut faire apprécier son mérite à des hommes tels que Newton, Huyghens, acquérir leur intimité, devenir leur correspondant. Son séjour habituel était Londres, et il faisait de fréquentes excursions en Allemagne. Venu à Paris, il y a été apprécié et bien accueilli. C'est en 1687 qu'il s'introduisit auprès de Huyghens et lui montra, par la solution de questions difficiles, que lui Fatio était très-versé dans les nouveaux calculs fluxionnels, auxquels d'ailleurs Huyghens était complétement étranger. La modestie n'était pas la qualité brillante de notre Suisse. En 1691, il écrit à Huy-

ghens qu'il était inutile de demander à Newton une nouvelle édition de ses *Principia,* qu'il s'en chargerait peut-être lui-même, et Huyghens met sur cette lettre : *Heureux Newton.* Dans la correspondance de Huyghens et de Leibniz, tous deux disent souvent : « telle est l'opinion de Newton et de Fatio, » les mettant sur la même ligne. On voit par là que Leibniz fait aussi grand cas du génie de Fatio. La brouille commence en 1691. Fatio communiqua à Huyghens des observations sur l'intégration de certaines équations différentielles, mais qui n'ont lieu que dans certains cas particuliers. Huyghens en donna la nouvelle à Leibniz, qui témoigna le désir de connaître ces observations, et, selon l'usage du temps, il offrit en échange une de ses méthodes d'intégration. Dès que le marché fut conclu, Leibniz envoya son procédé pour ramener les différentielles à des quadratures, et une quadrature à une autre quadrature, méthode encore usitée aujourd'hui. Huyghens, qui ne voyait pas là une méthode directe d'évaluer ces quadratures dans tous les cas (ce qui est d'ailleurs impossible), s'écria que l'échange n'était pas suffisant, et qu'il craignait que Fatio ne l'accusât d'avoir accepté de Leibniz du cuivre en échange de l'or de Fatio : χρυσεα χαλκω. Leibniz, inventeur du calcul infinitésimal, blessé de cette comparaison, répondit avec hauteur qu'il ne se souciait nullement de connaître le travail de Fatio, et qu'il présumait que ce travail n'avait trait qu'à certains cas particuliers, et pria Huyghens de ne pas communiquer sa méthode à Fatio et de garder le silence sur toute cette affaire. C'est ce que Fatio n'a jamais pardonné à Leibniz, car il nourrissait l'espoir flatteur d'entrer en relation avec un géant tel que Leibniz. Depuis ce moment, il ne cesse dans ses lettres à Huyghens de présenter Leibniz comme un plagiaire de Newton et ayant déguisé son larcin en adoptant une

autre notation, il rappelle sans cesse le fameux et malheureux scolie des *Principes* et ajoute que si l'on publiait certaines lettres, il en résulterait des choses fort désagréables pour Leibniz. M. Lefort, dans son édition du *Commercium epistolicum* (voir *Bulletin*, t. II, p. 113, 1856), a anéanti toutes ces calomnies, et le procès est jugé en dernier ressort, sans appel possible pour des esprits sans prévention. Il me semble d'ailleurs que Newton a généralisé le procédé cinématique de Neper pour le calcul des logarithmes; fluxions, fluents sont des expressions cinématiques; quant à la notation newtonienne, elle a retardé en Angleterre de plus d'un siècle les progrès du calcul infinitésimal. Newton était homme de génie physicien, Leibniz homme de génie métaphysicien : de là l'immense supériorité du premier.

Bernoulli (Jean) avait proposé à Leibniz le problème de la plus vite descente, disant que la courbe était très-connue des géomètres, mais sans la nommer (*Opera omnia*, t. Ier, p. 161, 165, 167, 262, 315, année 1696; dans le t. III, p. 484, Bernoulli donne la solution complète du problème). Leibniz répond qu'il n'avait pas le loisir de s'occuper de ce problème, mais qu'il ne doutait pas que son frère Jacques, le marquis de l'Hôpital et tous ceux qui possédaient les nouveaux calculs ne parvinssent bientôt à trouver la solution. Dès lors Fatio s'indigna de ce que Leibniz n'avait nommé aucun Anglais, tels que Newton, de Moivre, etc. Toutefois Leibniz, ne parlant que du calcul infinitésimal, ne pouvait pas nommer les Anglais. C'est ce qui engagea Fatio à paraître au grand jour et de publier en 1699 l'ouvrage *Lineæ brevissimi, etc.*, et d'où date la publicité du procès. Fatio résout le problème uniquement par la géométrie où il se montre éminent géomètre, et sans employer les considérations de Leibniz. C'était un triomphe; et p. 18 il déclare ne rien

devoir à Leibniz, qui serait bien fâché si l'on publiait certaines lettres, et dont nous avons parlé ci-dessus.

Ce Suisse était de ces savants *biceps*, bonne tête pour la science, mauvaise tête pour la conduite. S'étant associé à des camisards (*) réfugiés en Angleterre, il fut condamné avec eux en 1707 à l'exposition du pilori, iniquité judiciaire à ajouter à tant d'autres qu'on peut reprocher aux protestants, prétendus partisans du libre examen.

NOTE HISTORIQUE DES LATITUDES CROISSANTES;

Par M. V. CAILLET,
Examinateur de la Marine.

On sait que l'on attribue au prince Henri, fils de Jean Ier, roi de Portugal, l'invention faite vers l'année 1400 des cartes plates, dans lesquelles les méridiens et les parallèles sont représentés par des lignes droites rectangulaires et *équidistantes*. On admettait que sous de pareilles projections les loxodromies devenaient des lignes droites, et cette erreur se perpétua jusqu'au milieu du siècle suivant. Je trouve, par exemple, une carte plate avec tous ses défauts dans un ouvrage espagnol assez célèbre, l'*Arte de Navegaz*, publié en 1545 par Pierre Medina, et dont je possède la traduction italienne faite en 1555 à Venise.

(*) Courageux protestants des Cévennes, qui prirent résolument les armes après l'horrible révocation de l'édit de Nantes (1685) qui fit sortir de France 300000 hommes de conviction. C'est la page la plus *sanglante* de notre histoire.

C'est seulement en 1556 que Mercator publia à Flessingue une première carte dans laquelle, tout en conservant aux méridiens leur équidistance, on avait eu soin d'écarter de plus en plus les parallèles vers les pôles. D'après quelle loi cet écartement progressif était-il fait? C'est ce que personne ne fait connaître. Peut-être était-ce une simple perspective dans le genre de celle que l'on attribue à Wright et qui n'est exacte que pour les méridiens. De là viendrait alors le nom de *projection cylindrique* donné souvent aux cartes marines.

En 1590, assure-t-on, Judocus Hondius publia l'Atlas de Mercator d'après les véritables principes, qui consistent à maintenir, par toutes les latitudes, entre l'arc du parallèle et l'arc semblable du méridien, le même rapport que celui qui existe sur le globe.

Edouard Wright réclama l'invention et publia en 1599 son ouvrage dont le titre est : *Certain errors in navigation detected and corrected.* Il renferme plusieurs cartes réduites et fut réimprimé en 1610 et en 1657 à Londres. J'ai eu entre les mains cette dernière édition, qui existe à la bibliothèque du port de Brest. Il paraît qu'avant 1610 Wrigth employait une construction graphique dont on retrouve l'idée assez ingénieuse dans l'*Hydrographie* du père Fournier, p. 515 de la deuxième édition. Quand j'aurai un peu de temps à moi, je ferai des recherches à ce sujet au Dépôt de la Marine, où je trouverai probablement les documents précis qui me manquent. En 1610, Wright donna la première Table de latitudes croissantes calculée d'arc en arc, en faisant la somme du produit de chaque arc par la sécante de sa latitude (ce sont les parties méridionales). Je n'ai pu découvrir à qui est due la première expression différentielle de ces quantités, dont l'intégrale donne immédiatement la valeur rigoureuse pour chaque latitude.

En 1624, Willebrod Snellius, dans un ouvrage intitulé : *Tiphys batavus sive de navium cursibus et de re navali*, traite des latitudes croissantes sans soupçonner leur application aux cartes marines ; il ignorait, dit-on (*), les travaux de Wright, et le même reproche s'adresse à l'auteur hollandais, Metius Adrianus, qui écrivait en 1631. Ce fut cependant vers ce temps, assure le Père Fournier, que les premières cartes réduites furent publiées en France, au port de Dieppe. Les traités de Snellius et de Metius existent à la bibliothèque de Brest, et je m'aperçois que je n'ai pas le titre de ce dernier, mais il serait facile de le retrouver dans les catalogues (**).

Pendant longtemps on ne tint aucun compte de l'aplatissement de la terre, qui d'ailleurs était mis en doute parmi les savants. Quand l'illustre Pierre Bouguer partit en 1735 pour son voyage au Pérou, il ne manqua pas de soupçonner les corrections que devaient subir les latitudes croissantes en raison de la forme de la terre, et il a calculé une Table de ces corrections dans son livre sur la figure de la terre. Maupertuis, qui a souvent exploité le savant modeste, a aussi considéré les loxodromies sur le sphéroïde aplati dans son *Discours sur la parallaxe de la lune*, publié en 1741. Il a eu le talent de faire beaucoup de bruit de son vivant, sans avoir dépassé un niveau scientifique ordinaire.

Il paraît que Maclaurin s'est occupé de ce problème, mais je n'ai pu vérifier le fait (***). Il en est de même de don Jorge Juan, le célèbre auteur de l'*Examen maritime*,

---

(*) A la fin de son Avis au Lecteur, Snellius cite avec éloge Edouard Wright. Les Tables de Wright devaient être bien connues en Hollande, car elles ont été reproduites par Simon Stévin dans son *Hypomnemata mathematica*, dont la première édition est de 1608. (PROUHET.)

(**) *Primum mobile*. Amstelod., 4 vol. in-4. (P.)

(***) *Transactions philosophiques*, 1741.— *Traité des fluxions*, 1741. (P.)

traduit par Levêque, qui, au dire de Mendoza, aurait donné dans les observations de son voyage (lequel?) une Table de latitudes croissantes pour l'aplatissement $\frac{1}{266}$.

En 1791 (dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1793) Mendoza a publié la première Table vraiment complète, tant sur la sphère que sur le sphéroïde aplati de $\frac{1}{321}$. Elle était calculée de 10′ en 10′, et dans son volume *A complete collection of Tables for navigation and nautical astronomy*, publié en 1805, il l'a reproduite avec une disposition différente, mais étendue à chaque minute de la latitude. Il n'a pas fait connaître les formules dont il s'est servi, ce qui conduisit Dubourget à présenter un Mémoire approfondi sur cette matière au Bureau des Longitudes en 1802; ce Mémoire est inséré dans les Notes de son *Traité de Navigation*, et c'est là que j'ai vu un indice concernant Maclaurin. Enfin, Delambre a donné en 1803 (*Connaissance des Temps* pour 1804-1805 ou pour l'an XIII) des formules très-simples reproduites dans le IIIe volume de son *Astronomie*. Ce sont les formules que j'avais adoptées dans un Cours lithographié à l'Ecole Navale, du moins pour la latitude géographique, et de là on passait facilement aux latitudes géocentriques, que les cartes, du reste, n'emploient jamais.

ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE DES CHINOIS;

PAR M. K.-L. BIERNATZKI, DOCTEUR A BERLIN.

CRELLE, tome LII, page 59, 1856 (*).

Les missionnaires arrivèrent en Chine au commencement du XVIIe siècle; Ricci (Matthieu), mort en 1614 à Pékin, vint le premier, et ensuite le missionnaire Shaal sous le premier empereur mandchoux Taï-tsing (1644). Ferdinand Verbiest vint sous Kang-hi vers 1662 (**). Kang-hi, savant lui-même, faisait venir aussi des hommes distingués indigènes, entre autres Mei-wuh-gan, de Hwuy-tschan, qui rassembla des citations d'anciens auteurs chinois pour prouver que les connaissances apportées par les jésuites sont d'origine chinoise. Il composa avec l'empereur Kang-hi un livre mathématique nommé *Leuh-lei-yuen-yuen*.

Dans l'Introduction de cet ouvrage, après avoir reconnu le mérite de Ricci, Shaal, Verbiest, on demande d'où ces étrangers ont tiré leurs connaissances, et on répond qu'elles ont pris naissance dans l'*Empire du Milieu* et se sont ensuite répandues au delà de ses frontières. Les phénomènes célestes étaient connus, quoique imparfaitement, dès les premiers empereurs, et si peu de choses de ces connaissances sont parvenues à la postérité, il faut en chercher la cause dans l'incendie de la plupart de ces livres, ordonné et exécuté (deux siècles avant l'ère vul-

(*) Extrait du *Shangæ Almanac for* 1853 *and Miscellany printed Schangæ.*

(**) Verbiest, né à Bruges en 1630, mort en Chine en 1688, Président du Tribunal de Mathématiques, astronome, rectifie le calendrier chinois.

gaire) par le second empereur de la dynastie des *Tsin*, nommé Tsin-tchi-hoangti.

Cette catastrophe eut lieu en — 213, parce que les lettrés faisaient de l'opposition. C'est le premier empereur qui prit le nom de *Hoang-ti*, qui signifie seigneur souverain, titre que prennent, depuis, tous les empereurs. Auparavant ils prenaient le titre de *heou*, prince, *wang*, roi, ou *ti*, empereur. Hoang-ti était contemporain d'Annibal; mais heureusement la culture chinoise avait déjà exercé une heureuse influence sur toute la terre habitée, de sorte que la plupart des écrits des savants chinois furent traduits dans d'autres langues avant l'incendie. C'est de là que ces étrangers paraissent seuls avoir la possession de sciences qui, dans l'origine, étaient la propriété des Chinois.

Quelque risibles que soient ces prétentions de la vanité nationale, il faut pourtant convenir que les connaissances mathématiques remontent assez haut. La première mention d'un ouvrage sur les nombres se trouve dans l'ouvrage *Tung-kin-kang-muh*, c'est-à-dire Histoire générale de la Chine. On y lit que l'empereur Hwang-ti (— 2637) ordonna à son ministre Lischan de composer le *kiutschang*, les neuf sections de l'Arithmétique. Quoique la date assignée à cet ouvrage ne soit pas bien constatée, néanmoins il doit être très-ancien, car il est toujours cité comme le premier en ce genre, comme la base de la science des calculs.

Le célèbre régent sous la minorité de Tsching-wang (vers — 1160) est auteur d'un écrit sur les principales vérités mathématiques. C'est un dialogue entre lui et un personnage considérable nommé Schang-kaou. Le titre est *Tschan-pi*, la cuisse de Tschan. La raison de cette dénomination est qu'il est souvent question de la hauteur et de la base d'un triangle, que les Chinois

désignent par les mots *jambe* et *cuisse*. Les Grecs ont aussi les σκελη, *jambes*. L'écrit est divisé en plusieurs sections. La première est un extrait et présente le résumé de tout l'ouvrage.

Voici cette première section :

1. Tschan-king dit un jour à Schang-kaou : J'ai appris, seigneur, que tu es très-versé dans les nombres ; je voudrais te demander comment le vieux Fohi a-t-il établi des degrés dans la sphère céleste ; il n'y a pourtant pas de gradins pour monter au ciel, et on ne peut appliquer sur le ciel les niveaux et les mesures usitées sur la terre. C'est pour cela que je désirerais savoir comment il est parvenu à établir ces nombres.

2. Schang-kaou répondit : L'art de compter peut se ramener au cercle et au carré.

3. Le cercle doit être déduit du carré [*voir* n° 19].

4. Le carré se déduit de l'angle droit [c'est-à-dire du triangle rectangle, *keu-ku*].

5. L'angle droit repose sur *neuf unités* [probablement relatif au triangle rectangle 3, 4, 5, où l'on a $4+5=9$].

6. Si l'on décompose un angle droit [triangle rectangle] dans ses parties, la droite qui unit l'extrémité des cuisses, jambe 4, cuisse 3, est égale à 5.

7. Si l'on fait un rectangle avec les côtés extérieurs, la moitié du rectangle est égale à l'aire du triangle.

8. Si l'on ajoute les trois côtés, on a pour résultat la somme de 3, 4 et 5.

9. Le carré de l'hypoténuse 25 est égal à la somme des carrés des petits côtés.

10. Yu (— 2205) a rétabli l'ordre dans l'Empire en réalisant les pensées fondamentales de ces nombres.

11. Tschan-king s'écria : Comme ce système numérique est magnifique! Je voudrais maintenant t'interroger sur les principes nécessaires pour l'emploi de l'angle droit.

12. Schang-kaou répondit : L'angle droit est formé par trois lignes droites non courbées.

13. Elevé, on se sert de l'angle droit pour mesurer des hauteurs.

14. A l'inverse aussi pour mesurer des profondeurs.

15. Au moyen de l'angle droit posé horizontalement, on mesure des distances.

16 Par la rotation de l'angle droit, on forme la circonférence.

17. Le carré provient de la liaison d'angles droits.

18. Le carré appartient à la terre, le cercle au ciel; car le ciel est rond et la terre est carrée.

19. Les rapports des carrés sont des mesures fondamentales; les dimensions du cercle se déduisent du carré.

20. Le plan circulaire représente le ciel; les couleurs célestes sont bleues et noires et les couleurs terrestres jaunes et rouges. Le plan circulaire est constant d'après les rapports numériques célestes; il est à l'extérieur bleu et noir, à l'intérieur rouge et jaune pour représenter les stations célestes et terrestres [se rapporte probablement à la description d'un instrument ou d'un appareil cosmographique].

21. Celui qui connaît la terre est un savant, celui qui connaît le ciel est un sage. Cette connaissance commence

avec la ligne droite. La ligne droite est une partie de l'angle droit, et les rapports numériques de l'angle droit sont applicables à la forme de tous les objets.

22. Tschan-king s'écria : En vérité, cela est excellent.

Après l'incendie des livres (— 213), l'Arithmétique prit un nouvel essor, et le nombre des ouvrages qui en traitent est si considérable, que l'énoncé des titres prendrait trop de place. L'auteur désigne ici les traités principaux : un en — 100, deux en + 300, un en + 450 et un en + 700.

C'est vers la fin du VIIIe siècle, sous la dynastie des *Tang*, que les études mathématiques indiennes pénétrèrent probablement en Chine et furent apportées par un prêtre bouddhiste, Yihhing. Sous la dynastie des *Sung* (+ 950 à 1280) parurent plusieurs savants, entre autres Tsin-kiu-tschaou, qui rédigea vers 1240 le *Su-schou-kiu-tschang* ou Neuf sections de l'art numérique. Pendant la dynastie des *Yuen*, vers 1300, Ko-schan-king améliora les méthodes de calcul, et on lui attribue l'introduction de la trigonométrie sphérique. Les Chinois ayant eu à cette époque beaucoup de relations avec les Arabes, il est possible qu'ils en aient emprunté quelques connaissances mathématiques. Sous la dynastie des *Ming* (+ 1368 à 1573), l'Arithmétique fit peu de progrès, et lors de l'entrée des jésuites en Chine, il durent concevoir une idée médiocre des connaissances des Chinois en Arithmétique, et les savants chinois accueillirent leurs enseignements avec admiration; par ce motif, ces missionnaires eurent accès auprès de l'empereur Kang-hi.

M. Biernatzki fait observer que les Chinois ont le mérite d'avoir été eux-mêmes les inventeurs de leur système de numération. Leur *Swan-pan*, planche à calcu-

ler, est d'invention relativement récente; anciennement ils se servaient d'entailles faites dans des bambous. Leurs neuf chiffres figurent évidemment ces entailles :

𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
1	2	3	4	5	6	7	8	9

On peut aussi renverser ces signes : écrire 𝍮 pour 6, 𝍪 pour 2, etc.

Les autres nombres sont représentés par des valeurs de position données aux chiffres écrits *à côté les uns des autres*, d'après le *système décimal*, comme nous. Cela s'est fait plusieurs siècles avant que l'on eût en Europe soupçon d'une telle théorie et avant que le système chiffré des Arabes fût imaginé. L'exemple suivant de soustraction est emprunté à l'ouvrage de Tsin-kiu-tschaou, mentionné ci-dessus :

𝍠 𝍬 𝍦 o o o o = 1470000
    𝍮 X 𝍣 𝍥 X = 64464

𝍠 𝍬 o 𝍭 𝍤 𝍫 𝍮 = 1405536

Dans les traités les plus anciens, on ne trouve ni l'*addition*, ni la *soustraction*. On suppose cette connaissance chez le lecteur; il en est de même chez les Arabes. La multiplication porte le nom de *Kea-fa;* cela veut dire réunion de plusieurs nombres égaux, et la division porte le nom de *Kihn-fa*, qui veut dire soustraction successive du même nombre. Ils commencent la multiplication par la gauche et opèrent la division par des soustractions successives.

Passons maintenant à l'analyse de l'ouvrage fondamental *Kin-tschang*, Neuf sections de l'Arithmétique. Il

contient en tout 246 questions distribuées en neuf sections, dont chacune forme une partie de l'Arithmétique.

La première section porte pour titre *champs carrés*, la seconde *riz et argent*, la troisième *partages divers*, etc. Nous ne donnons pas la traduction littérale, mais d'après la terminologie usitée chez nous.

Ire Section. — *Fang-tien*, mesure des surfaces.

Commence par l'explication de la multiplication et de la division; viennent ensuite des questions avec les indications nécessaires pour l'évaluation des aires de diverses figures. Pour le triangle, on donne la règle de multiplier la base par la moitié de la hauteur. L'auteur donne ces six méthodes pour l'aire du cercle selon le degré d'exactitude qu'exige la question :

1° r^2,

2° $\frac{1}{3} \cdot \pi^2 r^2$;

3° $\frac{1}{12} \cdot 4\pi^2 r^2$;

4° $\frac{1}{4} \cdot 3.4r^2$;

5° $\frac{1}{4} \cdot 2r . 2\pi r$;

6° $3r^2$.

L'auteur prend $\pi = 3$.

Les commentateurs du *Kiu-tschang* disent que l'auteur connaissait le rapport plus exact; mais la question n'exigeait pas une plus grande précision. En effet, dans un ouvrage qui date de la fin du VIe siècle, on trouve le rapport 7 : 22, et chez *Liu-Hway*, auteur plus ancien, le rapport 50 : 157 qui revient à $\pi = 3,14$. Pour l'aire du

segment, on donne

$$\frac{\sin a\,(1 - \cos a) + (1 - \cos a)^2}{2},$$

nous supposons $r = 1$.

IIe Section. — Schuh-pu ou proportion. Règles pour trouver la valeur du riz selon l'espèce et la qualité. Le *Hwang-tsung*, instrument musical à vent, ayant la forme d'un tube, sert de base pour indiquer les poids et les mesures. L'instrument est divisé en 90 parties égales dont chacune est 1 *Fun* (ligne); 10 *Fun* font 1 *Tsun* (pouce), 10 *Tsun* font 1 *Schih* (pied); le tube peut contenir 1200 grains de riz. 10 tubes remplis font un *Ho*, 10 *Ho* un *Sching*, notre pinte à peu près. Ainsi pour les mesures de longueurs, on a la division décimale, mais pour les poids on a la division duodécimale. Ainsi les 1200 grains de riz pèsent 12 *Tschu*; 24 *Tschu* un *Leang*, notre once, et 16 *Leang* un *Kin*, notre livre.

IIIe Section. — Schwal-fun, règle de société. Partage de biens entre plusieurs personnes ayant des parts différentes.

IVe Section. — Schaou-kwang, évolutions. Extraction des racines carrées et cubiques; mêmes règles que chez nous. Applications aux parallélogrammes et aux parallélipipèdes; point de puissances supérieures à la troisième. Les nombres portent les noms des figures, comme chez les Grecs.

Ve Section. — Schang-kung, mesure des solides. Calculs qui se présentent dans la construction des édifices; problèmes de stéréotomie, concernant murs, tours, remparts, fossés, grottes; indications pour évaluer les pyramides, prismes, cônes, etc.; problèmes pour mesurer la

vitesse de divers modes de voyager, à pied, à cheval, en bateau, etc.

VIe Section. — *Keun-schuh,* règle d'alliage. Méthode pour la répartition de l'impôt selon que l'on prend pour base le sol ou la population; valeur de marchandises de prix divers et autres questions du même genre.

Exemple : Une cage contient des lapins et des faisans, en tout 35 têtes et 94 pieds; combien des uns et des autres? *Réponse :* 23 faisans et 12 lapins.

VIIe Section. — *Yin-nuh,* excès et défaut.

Exemple : Un certain nombre de commerçants achètent un certain nombre de marchandises; si chaque commerçant donnait 1 *Kasch*, il y aurait 3 *Kasch* de trop, et si chacun donnait 7 *Kasch*, il y en aurait 4 de moins; combien y avait-il de commerçants et de marchandises? *Réponse :* 7 commerçants et 53 marchandises.

VIIIe Section. — *Fang-tsching*, équations. Une explication sur l'emploi du plus (*Tsching*) et du moins (*Fu*), et dans une série de dix-huit questions, on montre comment à l'aide d'équations on peut par des quantités connues trouver les inconnues.

Exemple : 5 bœufs et 2 moutons coûtent 10 *Taëls* en or, 2 bœufs et 8 moutons coûtent 8 *Taëls;* combien chaque bœuf et chaque mouton? *Réponse :* un bœuf $1\frac{13}{21}$ *Taël* et chaque mouton $\frac{20}{21}$ de *Taël.*

IXe Section.—*Keu-ku*, trigonométrie. Contient vingt-quatre questions sur le triangle rectangle et solutions au moyen du triangle rectangle.

Ier Exemple : Un roseau croît au milieu d'un étang carré de 10 pieds de côté et dépasse l'eau de 1 pied; en

pliant le roseau, son extrémité atteint juste le bord; quelle est la profondeur de l'eau? *Réponse :* 12 pieds.

Le problème consiste à trouver l'hypoténuse d'un triangle rectangle, connaissant un côté (5) et la différence (1) des deux autres côtés.

IIe Exemple. Un bambou haut de 10 pieds est planté sur un sol; on casse l'extrémité, on amène le bout cassé jusqu'au sol et alors les deux extrémités sont éloignées de 3 pieds; quelle est la longueur de la partie enlevée? *Réponse :* $4\frac{11}{20}$.

Ici, dans un triangle rectangle, on connaît la base (3) et la somme de deux autres côtés (3).

(*La suite prochainement.*)

BIBLIOGRAPHIE

Eléments d'Arithmétique, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences, à l'Ecole spéciale Militaire de Saint-Cyr, à l'Ecole Forestière et à l'Ecole Navale; par M. *J.-A. Serret.* 3[e] édition, revue et augmentée de la Table des Logarithmes des nombres de 1 à 10000, calculés avec 5 décimales. (*L'introduction de cet ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes en date du* 22 *août* 1859.) In-8; 1861. Chez Mallet-Bachelier, libraire. — Prix : 4 francs.

Le Traité complet d'Arithmétique que M. Serret a publié il y a déjà un certain nombre d'années avait paru, à cause de son étendue et de la profondeur de certaines

théories, difficile à étudier, même pour les candidats aux écoles supérieures. L'ouvrage dont nous allons parler, déjà parvenu à sa troisième édition et autorisé depuis longtemps, est beaucoup plus élémentaire, comme l'indique son titre; mais il peut suffire même pour des études plus spéciales que celles auxquelles il semble destiné.

Les changements introduits dans cette nouvelle édition ne portent que sur des détails d'une importance secondaire; mais ce qu'il faut louer sans réserve dans celle-ci comme dans les précédentes, c'est le style, qualité la plus importante peut-être quand il s'agit d'exposer une science dont les matières et même les méthodes ne peuvent guère varier : aussi nous pouvons assurer qu'en parlant de la clarté du style, nous n'employons pas une formule banale, comme cela se fait quelquefois. Cette clarté n'exclut pas une concision qu'on aurait tort de rechercher dans une leçon orale.

Le point de vue sous lequel l'auteur présente la division revient en réalité et avec raison, à celui qui est indiqué en peu de mots dans l'extrait du plan d'études relatif à l'arithmétique, morceau très-remarquable, que l'on aime à trouver en tête de cette troisième édition.

L'auteur explique les fractions décimales périodiques par une méthode généralement employée aujourd'hui, c'est-à-dire en considérant une fraction négligeable : mais ce raisonnement étant admis pour les périodes simples, il n'aurait pas été nécessaire de le renouveler pour les périodes mixtes, qui dérivent des précédentes : peut-être même serait-il plus simple de réduire directement en périodes les fractions $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, etc., comme le faisait M. Vernier; mais du moins M. Serret traite complétement la question, ce qui ne se fait pas dans toutes les Arithmétiques modernes.

Quant aux approximations, l'auteur s'éloigne, autant que le permettent les *Programmes* et surtout les exigences des examens, des subtilités inutiles que le plan d'études signale dans beaucoup d'ouvrages : en réalité, il suffirait, à propos des erreurs relatives, de montrer comment on peut les conclure des erreurs absolues, et réciproquement. Nous croyons aussi que la seule explication claire et naturelle de la division abrégée consisterait à la présenter comme l'inverse de la multiplication abrégée.

Sans pousser plus loin ces observations de détail, nous terminerons en observant que cette nouvelle édition est augmentée de la Table des Logarithmes à 5 décimales, de 1 à 10000, et surtout en signalant, à la fin de chaque chapitre et sous le titre de *questions proposées*, une série très-remarquable d'exercices aussi intéressants que variés, quoiqu'ils ne roulent que sur la pure arithmétique.

CH. HOUSEL.

COURS DE MATHÉMATIQUES, à l'usage des candidats à l'École Centrale des Arts et Manufactures et de tous les élèves qui se destinent aux écoles du Gouvernement; par M. *Charles de Comberousse*. 3 vol. in-8 avec figures dans le texte. Chez Mallet-Bachelier, libraire.

Tome Ier : *Arithmétique, Algèbre élémentaire*. 7 fr. 50 c.
Tome II : *Géométrie plane, Géométrie dans l'espace, Complément de Géométrie, Trigonométrie, Complément d'Algèbre* (avec figures dans le texte)............... 10 fr.
(*Chaque volume se vend séparément.*) — *Le tome III est sous presse.*

La préface de cet ouvrage nous a tout d'abord favorablement disposé. L'auteur y montre peu de goût pour les *Programmes*, et désapprouve l'idée, assez admise pourtant, de mutiler la science pour l'enfermer dans un cadre

officiel. Il pense aussi que l'utilité industrielle des mathématiques n'est pas la seule, ni la plus haute, et préfère celle qui regarde le perfectionnement de l'intelligence. Ces opinions-là pourront paraître excentriques ou surannées à certains esprits; nous n'en pensons pas moins leur devoir tout notre assentiment.

En parcourant ce nouveau *Cours de Mathématiques*, on aperçoit facilement la pensée dominante qui en a dirigé la composition. Avant tout, M. de Comberousse s'est efforcé d'être clair et complet. Nous devons reconnaître que presque toujours il y a réussi. Ce succès tient surtout à deux causes. La première est une mise en œuvre habile des matériaux épars çà et là dans la foule des publications provoquées par les concours aux Écoles. Un commerce assidu de l'auteur avec les meilleurs travaux de ses devanciers semble avoir mis dans ses mains toutes leurs améliorations de détail, dont son ouvrage devient en quelque sorte le répertoire. En second lieu, ces éléments d'un bon livre ont subi, avant d'être employés, le contrôle de l'expérience personnelle et d'une pratique réfléchie de l'enseignement dont l'influence est visible à chaque page. De là ce soin constant, presque minutieux, dans la recherche des transitions qui font passer l'élève d'une vérité à l'autre par des nuances presque insensibles. Adversaire de l'imprévu dans les raisonnements comme dans les énoncés, l'auteur s'efforce toujours d'y substituer la génération logique et l'enchaînement naturel des idées. C'est là un des traits les plus saillants du livre. Si le perpétuel souci des liaisons semble fastidieux aux intelligences d'élite, qu'une espèce d'intuition porte rapidement d'un principe à ses conséquences même éloignées, les esprits ordinaires, et c'est là ce qui importe, auront tout lieu de s'en applaudir.

Il ne suffit pas à l'auteur d'avoir satisfait à ces deux

conditions essentielles d'un bon travail didactique, la clarté et la simplicité. Comme il n'a pas moins de répugnance pour l'incomplet que pour l'imprévu, il a soin de donner à chaque théorie l'étendue et les justes développements qu'elle comporte. Il sait qu'autant les idées générales et les vues d'ensemble ont d'attrait pour l'esprit, autant les notions tronquées et sans lien le rebutent, et que le meilleur moyen pour répondre aux questions d'un programme, c'est d'en avoir franchi les limites. Aussi les remarques et même les théories complémentaires apparaissent-elles en foule dans ce Cours. Sans entrer, à cet égard, dans une énumération ou trop longue ou trop incomplète, nous nous bornerons à dire que ces additions, réunies en groupes distincts ou disséminées dans l'ouvrage, lui donnent un caractère d'utilité très-générale. Dans les deux volumes parus, nous trouvons des Traités complets d'Arithmétique, de Géométrie, de Trigonométrie et d'Algèbre, remplissant et dépassant même les conditions du *Programme pour l'admission à l'École Polytechnique*. Chacun d'eux constitue une œuvre fort estimable par le fonds même et le développement des idées.

La rédaction, nous devons le reconnaître, est moins irréprochable. Le plus ordinairement naturelle et simple, il arrive parfois qu'elle pèche par l'impropriété des termes, et compromet ainsi cette clarté si précieuse et d'ailleurs si habituelle à l'auteur. Nous ne saurions approuver, par exemple, la plupart des préliminaires de géométrie, la définition de cette science et ce qui regarde les dimensions. Nous voyons bien, pour cette dernière notion, que l'auteur demeure fidèle à ses bonnes habitudes, en cherchant à la rattacher à des idées connues et familières, mais nous ne croyons pas qu'il soit possible d'allier la clarté avec la rigueur, en plaçant de pareilles considérations au début de la géométrie.

La justesse de la pensée souffre quelquefois des négligences de langage. Par exemple, on lit à la page 468 du second volume : « L'emploi d'une série divergente ne » présente, en général, aucune utilité. » C'est aucune sûreté, aucune *légitimité* qu'il fallait dire. Tout le monde professe aujourd'hui sur ce point l'opinion que l'illustre Abel formulait ainsi : « Avec une série divergente, on » prouve tout ce qu'on veut, l'impossible aussi bien que » le possible. »

Malgré des imperfections qui s'arrêtent presque toujours à la forme, l'ouvrage de M. de Comberousse n'en offre pas moins aux élèves de précieuses ressources. La plus avantageuse peut-être, dont nous n'avons encore rien dit, consiste en un grand nombre de questions heureusement choisies, nettement développées ou données comme exercices au lecteur. Elles contiennent une foule d'indications pratiques et de renseignements bons à connaître. Comme elles ont fréquemment pour objet des problèmes qui se rattachent aux travaux publics et à l'industrie, elles justifient pleinement la destination particulière de ce Cours, tout en offrant un véritable intérêt à tous ceux qui veulent étudier sérieusement les mathématiques. Nous ne devons pas oublier, à propos de problèmes, de mentionner un excellent chapitre destiné à guider l'élève dans la solution des questions de géométrie. Emprunté principalement à l'intéressant travail de M. Paul Serret sur *les méthodes*, il fournit une énumération, incomplète sans doute, mais suffisante et bien présentée des procédés que le géomètre met en usage, et les exemples qui en montrent l'application sont choisis et exposés avec un grand soin. C'est là, croyons-nous, une innovation dans les éléments de la géométrie, et nous pensons qu'elle ajoute un

prix réel à l'ouvrage recommandable de M. de Comberousse.

F. Frenet,
Professeur à la Faculté de Lyon.

Tables de Logarithmes a cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles, par M. *J. Hoüel*, ancien élève de l'École Normale. In-8; 1858. (*L'introduction de cet ouvrage dans les Écoles publiques est autorisée par décision du Ministre de l'Instruction publique et des Cultes en date du 22 août 1859.*) Chez Mallet-Bachelier. — Prix : 2 fr.

Nous regrettons que ces Tables de Logarithmes à cinq décimales, publiées en 1858, ne nous aient pas été connues plus tôt; mais leur mérite nous fait un devoir d'en donner une analyse détaillée. On sait que les logarithmes à cinq décimales sont suffisants dans un grand nombre de cas, pour lesquels des Tables avec plus de décimales seraient beaucoup moins commodes. Mais il faut alors que les petites Tables soient disposées de telle sorte qu'elles puissent fournir tout le degré d'exactitude que comporte leur étendue. Nous croyons, sans exagération, que les Tables que nous annonçons, et qui se distinguent, par des dispositions toutes particulières, des autres Tables à cinq décimales, offrent, sous le rapport de l'exactitude qu'elles permettent d'atteindre, le *nec plus ultra* dans l'état actuel des choses. Dans l'Avertissement, l'auteur lui-même annonce, avec beaucoup de modestie, ses Tables comme étant *principalement une reproduction des Tables de Lalande*; mais il indique ensuite sept points par lesquels les deux Tables diffèrent. Nous ne reproduirons pas ces indications de l'auteur, mais nous allons résumer, autant que nous le permet l'étendue de notre Bulletin, les principaux points

qui, selon nous, recommandent ces Tables à l'attention du public.

La Table des Logarithmes des nombres est, comme celle de Lalande, à simple entrée, et l'on y a supprimé les caractéristiques, qui sont tout à fait inutiles. Cette disposition nous semble bien préférable à celle des autres Tables à cinq décimales (telles que celles d'August), qui sont à double entrée. La disposition à simple entrée facilite l'usage des Tables, surtout lorsqu'il s'agit de revenir du logarithme au nombre........

Dans les Tables trigonométriques, on trouve des Tables des parties proportionnelles des différences, qui par leur étendue, leur commodité et leur exactitude, offrent au calculateur des facilités que l'on ne rencontre dans aucune autre Table de ce genre.

Le format de ces belles Tables est, il est vrai, un peu grand, mais nullement incommode, des Tables du genre de celles-ci étant destinées à prendre place sur un bureau et non dans la poche. L'impression en est distincte et claire, et le papier très-convenable.

Nous résumerons notre jugement en disant que ces Tables méritent le premier rang parmi toutes les Tables à cinq décimales que nous connaissions jusqu'ici ; qu'elles offrent un grand nombre de dispositions propres à l'auteur, et utiles sous beaucoup de rapports à l'exactitude des calculs ; qu'elles renferment tout ce que, dans l'état actuel de la science, on peut demander pour faciliter et abréger autant que possible les calculs numériques, en se tenant dans l'étendue des Tables à cinq décimales ; et que l'Introduction contient beaucoup de pages instructives, que l'on ne trouve pas dans d'autres Tables, et qui sont propres à l'auteur.

Nous recommanderons donc expressément ces Tables à nos écoles d'Allemagne, et nous désirerions vivement que

M. Mallet-Bachelier se décidât à en publier une édition avec introduction en allemand, comme il peut *seul* le faire au point de vue commercial. Que l'auteur reçoive de nouveau nos sincères remercîments pour cet excellent opuscule, qui, depuis qu'il nous est connu, ne nous quitte plus dans nos travaux personnels, et a pris place auprès des Tables à six décimales de Bremiker et des Tables à sept décimales de Schrön. GRUNERT.

THÉORIE ET APPLICATION DES DÉTERMINANTS, AVEC L'INDICATION DES SOURCES ORIGINALES, par le docteur *Richard Baltzer*, professeur au Gymnase de Dresde. Traduit de l'allemand par M. *Hoüel*, docteur ès sciences. In-8, 1861, de XII-236 pages. Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire. — Prix : 5 fr.

Le Traité de M. Baltzer se distingue des ouvrages écrits sur le même sujet par un plan sagement conçu et habilement exécuté. L'auteur a séparé, avec raison, les principes généraux et leurs applications. Une première section est consacrée à l'exposition, suivant la méthode synthétique, telle qu'on la rencontre chez les anciens, des propriétés fondamentales des déterminants et des algorithmes auxquels elles servent de base. Une seconde section comprend les applications à l'algèbre, à l'analyse et à la géométrie. Par cette division judicieuse, M. Baltzer a rendu plus visible l'enchaînement des principes, en même temps qu'il donnait à chaque sujet d'application un plus complet développement.

On sait que la théorie des déterminants a donné lieu à la création d'une foule de dénominations nouvelles, dont quelques-unes paraissent indispensables, mais dont la plus grande partie s'applique à des objets dont l'importance n'exigeait pas une désignation spéciale. Sur ce point,

et nous ne pouvons que l'approuver, M. Baltzer fait une profession de foi très-explicite : « Dans le choix des notations et des dénominations relatives à cette théorie, j'ai cru devoir user de la circonspection la plus minutieuse, parce que, sans cela, les nouvelles mathématiques menacent de devenir inintelligibles à cause de l'extravagante profusion de termes nouveaux qui fait invasion dans leur vocabulaire. »

Comme l'ouvrage de M. Baltzer aura plusieurs éditions, nous croyons qu'il ferait bien de donner les énoncés de plusieurs des propositions sur les déterminants qui n'ont pas pu trouver place dans son travail, soit à cause de leur peu d'importance théorique, soit parce qu'elles se rattachent à des théories à peine ébauchées. Nul mieux que M. Baltzer ne peut faire, dans les recueils scientifiques, un choix d'excellents exercices propres à fournir au lecteur l'occasion de se fortifier dans la théorie et même d'y faire quelques nouveaux progrès.

M. Hoüel a traduit la *Théorie des Déterminants* avec le talent et la conscience qui distinguent tous ses travaux. Inutile d'ajouter que la partie typographique ne laisse rien à désirer (*). PROUHET.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL; par *S.-F. Lacroix*. 6e édition, revue et augmentée de Notes par MM. *Hermite* et *J.-A. Serret*, membres de l'Institut. 2 vol. in-8 avec planches. 1861-1862. Paris, Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire. — Prix : 15 fr.

Cette nouvelle édition d'un ouvrage estimé tire son

(*) L'imprimerie Mallet-Bachelier, dirigée par M. Bailleul, depuis 1839, vient d'obtenir une médaille (*price medal*) à l'Exposition universelle de Londres.

prix des Notes dont MM. Hermite et Serret l'ont enrichie, et qui mettent le Traité de Lacroix au niveau des progrès de la science. Un ouvrage de ce genre se prêtant difficilement à l'analyse, nous nous contenterons de donner un extrait de la table des matières, extrait suffisant pour faire comprendre le service rendu à l'enseignement par MM. Hermite et Serret.

Note de M. Hermite. — Sur la théorie des fonctions elliptiques. Propriétés communes aux fonctions circulaires et elliptiques. — De la périodicité dans les fonctions circulaires et elliptiques. — Définition des fonctions Θx, $H(x)$: leur expression en produits et en séries. — De deux formes principales que peuvent prendre, parmi une infinité d'autres, les fonctions Θ, H, etc. — Propriétés des fonctions Θ et H; définition de $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$. — Addition des arguments. Théorème d'Abel. — Sur les fonctions de seconde et de troisième espèce. — Des fonctions de M. Weierstrass. — Développement des fonctions elliptiques en séries simples de sinus et de cosinus.

Notes de M. Serret. — I. Sur quelques points du calcul différentiel et du calcul intégral (Formules de Maclaurin, Taylor, Lagrange, passage des différences finies aux différentielles). — II. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. — III. Sur quelques formules nouvelles et leur application à la théorie des lignes et des surfaces courbes. — IV. Sur les intégrales eulériennes. — Sur l'évaluation approchée du produit $1.2.3\ldots x$, lorsque x est un très-grand nombre, sur la formule de Stirling et sur les nombres de Bernoulli.

PROUHET.

CALCUL DES VARIATIONS.

EULER. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes.* Lausanne, 1744.

LAGRANGE. *Théorie des fonctions analytiques.* 1re édition, in-4; Paris, 1797. 2e édition; Paris, 1813. 3e édition par J.-A. Serret; Paris, 1847.

LAGRANGE. *Essai sur le calcul des fonctions.* Paris, 1808.

POISSON. *Mémoires de l'Institut de France,* t. XII. Paris, 1833.

JACOBI. *Journal fur Mathematik;* Crelle, t. XVII. Berlin, 1837.

OSTROGRADSKY. *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg,* t. Ier et III. Saint-Pétersbourg, 1838.

DELAUNAY. *Journal de l'École royale Polytechnique,* XXIXe cahier. Paris, 1843.

SARRUS. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences,* t. X. Paris, 1848.

DELAUNAY. *Journal de Mathématiques de Liouville,* t. VI. Paris, 1841.

STRAUCH. *Theorie und auwendung der variations calcul.* Zurich, 1849.

JELETT. *Calculus of variations.* Dublin, 1850.

SCHOLLBACH. *Probleme der variations Rechnung;* Crelle, t. XLI, p. 293; 1851.

(Extrait du *Treatise on infinitesimal calculus....* by Bartholomew PRICE. Oxford, 1854; t. II, p. 234, 2e édition. Ouvrage clair, complet, rigoureux, sans cesser d'être élémentaire.)

Il faut ajouter à cette liste :

MOIGNO (l'abbé). *Leçons de calcul différentiel et de*

calcul intégral; t. IV, *Calcul des variations*, in-8, 1861.

Le savant disciple de Cauchy a rendu plus expressive la notation de Sarrus. On en rendra compte. TM.

ARITHMÉTIQUE POLITIQUE;

PAR M. OETINGER,
Professeur à l'université de Fribourg (Brisgau).

Dans le t. XXXVI (p. 189-264 et p. 267-322) du *Journal de Grunert*, ce professeur complète sa notice historique (voir *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 441; 1861), et tout le reste est consacré à faire voir que l'équité exige qu'on calcule par intérêt *composé* lorsqu'il s'agit d'annuité, et que le créancier est lésé lorsqu'on calcule par intérêt simple; démontré analytiquement et aussi par de nombreuses applications numériques, qui ôtent toute espèce de doute. Il est vrai que le droit romain défend de prendre l'intérêt des intérêts: objection de nulle importance; on n'est pas tenu d'obéir servilement à ce droit; d'ailleurs on peut regarder l'intérêt comme faisant désormais partie du capital, et il n'y a pas lieu à l'*anatocismus* (*interusuram*); l'ouvrage de Mangold est toujours omis.

Le t. XXXVII (p. 125 à 204) traite dans toute son étendue et sous toutes les formes que présentent les emprunts contractés par les gouvernements et mérite une traduction.

La question traitée p. 128 du t. XXXVII présente pour la France un intérêt actuel: il s'agit de convertir un capital à p pour 100 en un autre capital de q pour 100; la théorie des obligations trentenaires est encore à faire.

TM.

DOCUMENTS

RELATIFS

A LA VIE ET AUX TRAVAUX

SCIENTIFIQUES OU LITTÉRAIRES

DE

JEAN-BAPTISTE BIOT.

Né à Paris le 21 avril 1774; canonnier volontaire au 9e bataillon de la Seine-Inférieure (18 septembre 1792); rentré dans ses foyers après la bataille de Hondschoote (9 septembre 1793); élève des Ponts et Chaussées (8 janvier 1794); élève de l'Ecole Polytechnique et chef de brigade (5 novembre 1794); rentré à l'Ecole des Ponts et Chaussées (22 octobre 1795); professeur de mathématiques à l'Ecole Centrale du département de l'Oise (13 mars 1797); examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique (29 septembre 1799), a continué cette fonction jusqu'en 1806; professeur de physique mathématique au Collége de France (25 novembre 1800); astronome adjoint du Bureau des Longitudes (18 septembre 1806); professeur à l'Athénée (1803 à 1806); chargé par le Bureau des Longitudes, conjointement avec Arago, de continuer la mesure du méridien en France et en Espagne (août 1806); chargé par le Bureau des Longitudes, conjointement avec M. Mathieu, de déterminer la longueur du pendule à Bordeaux (août 1808); professeur d'astronomie à la Faculté des Sciences de Paris (18 avril 1809); docteur ès sciences (5 août 1809); chevalier de la Légion d'honneur (ordonnance royale du 30 août 1814); chevalier de la Légion d'honneur (décret impérial du 8 avril 1815); chargé, à la Faculté des Sciences, de l'enseignement de la partie de la physique relative à l'acoustique, au magnétisme et à l'optique (de 1816 à 1826); rédacteur du *Journal des Savants* (6 mai 1816); membre du conseil de perfectionnement de l'Ecole Polytechnique (23 septembre 1816), de 1817 à 1821; chargé par le Bureau des Longitudes d'aller mesurer le pendule en Ecosse et aux îles Shettland (1817); envoyé à Dunkerque, conjointement avec Arago, pour déterminer la latitude concurremment avec une Commission anglaise (1818); inspecteur des études des Écoles royales militaires de Saint-Cyr et de la Flèche, de 1821 à 1830; chevalier de l'ordre de Saint-Michel (21 juillet 1821); membre du jury central de l'exposition des produits de l'industrie (1823); officier de la Légion d'honneur (11 août 1823); envoyé par le Bureau des Longitudes en Illyrie et aux îles Baléares pour déterminer la longueur du pendule à secondes sur divers points du parallèle moyen, et mesurer à nouveau le pendule et la latitude à l'extrémité australe de l'arc d'Espagne (1824-1825); astronome titulaire du Bureau des Longitudes (1825); membre du jury pour l'admission des élèves aux Ecoles Polytechnique et de Saint-Cyr (1825); rappelé aux fonctions de professeur d'astronomie à la Faculté des Sciences (18 mars 1826); doyen

de la Faculté des Sciences (22 mai 1840); membre du Conseil académique (19 juin 1840); mis à la retraite comme professeur à la Faculté des Sciences, et nommé professeur honoraire (2 mars 1849); commandeur de la Légion d'honneur (3 mai 1849); chevalier de l'ordre (de Prusse) pour le mérite dans les sciences et les arts (16 août 1850).

Membre correspondant de la Société Philomathique de Paris (3 avril 1797); associé de la Section de Géométrie de l'Institut de France (25 novembre 1800); membre de la Société Philomathique de Paris (2 février 1801); membre de l'Institut de France, Section de Géométrie (11 avril 1803); membre correspondant de l'Académie des Sciences, Lettres et Arts de Turin (4 mars 1804); membre non résident de la Société des Sciences, Lettres et Arts de Nancy (8 mars 1806); membre correspondant de l'Académie des Sciences de Lucques (26 juillet 1806); membre correspondant de l'Académie royale des Sciences de Munich (6 avril 1808); membre honoraire de la Société des Antiquaires d'Ecosse (9 décembre 1814); membre de la Société royale de Londres (16 avril 1815); membre de l'Académie royale des Sciences de Stockholm (19 juin 1816); citoyen libre du bourg d'Aberdeen (9 juillet 1817); membre honoraire de la Société pour l'avancement des Sciences naturelles de Marbourg (13 septembre 1817); membre honoraire de la Société Médico-Chirurgicale d'Aberdeen (20 novembre 1817); docteur en droit civil et en droit canon de l'Université d'Aberdeen (12 décembre 1817); membre honoraire de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg (5 mai 1818); membre correspondant de l'Académie des Sciences de Naples (10 avril 1818); membre correspondant de l'Académie royale de Lucques (25 août 1818); membre honoraire de l'Académie de Wilna (18 janvier 1819); membre de la Société Philosophique de Cambridge (24 avril 1820); membre de l'Académie royale de Berlin (3 juillet 1820); membre de la Société Helvétique des Sciences naturelles (28 juillet 1820); membre honoraire de la Société royale pour l'encouragement des Sciences, des Lettres et des Arts d'Arras (18 janvier 1822); membre de l'Académie Américaine des Arts et Sciences de Boston (21 août 1822); membre étranger de la Société Italienne des Sciences résidant à Modène (19 novembre 1822); membre honoraire de la Société Météorologique de Londres (30 juillet 1824); membre honoraire de l'Académie des Sciences naturelles de Catane (25 juin 1825); membre non résidant de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Palerme (1er octobre 1827); membre étranger de l'Académie de Palerme (3 février 1828); membre honoraire de l'Académie royale de Messine (3 janvier 1829); membre de la Société pour l'avancement des Sciences naturelles de Halle (3 juillet 1829); membre de la Société royale Astronomique de Londres (13 avril 1832); membre de la Société royale des Sciences d'Upsal (18 octobre 1836); membre honoraire de la Société littéraire et philosophique de Saint-Andrews, Ecosse (26 mai 1838); membre correspondant de la Société littéraire et historique de Québec (20 juillet 1839); honoré de la médaille de G. Copley (1840); membre libre de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres de France (1841); membre honoraire de la Société littéraire et philosophique de Manchester (18 avril 1843); membre correspondant de l'Académie royale de Milan (8 août 1844); membre de la Société Académique de l'Oise (1845); membre correspondant de l'Académie pontificale des Lincei, de Rome (20 novembre 1850); membre correspondant de l'Académie des Sciences de Bologne (4 juin 1851); membre de l'Académie Française (1856); membre correspondant de l'Académie des Sciences, Lettres et Arts de Venise (21 décembre 1857); membre correspondant de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Arts de Modène (20 décembre 1858); académicien étranger pour la classe physico-mathématique de l'Académie royale des Sciences de Turin (8 janvier

1860); membre étranger de l'Académie impériale des Sciences de Vienne (26 mai 1860); membre correspondant de l'Académie des Sciences naturelles de Cherbourg (15 janvier 1861).

Mort à Paris le 3 février 1862.

CATALOGUE

DES MÉMOIRES ET ARTICLES INSÉRÉS DANS DIVERS RECUEILS OU PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

1° BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE (1re SÉRIE).

1. Considérations sur les équations aux différences mêlées; décembre 1799, t. II.

2. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles et sur les surfaces vibrantes; octobre 1800.

3. Sur la théorie du comte Rumford relative à la propagation de la chaleur dans les fluides; août 1801, t. III.

4. Sur quelques propriétés de l'appareil galvanique (en commun avec Fr. Cuvier); août 1801.

5. Sur le mouvement du fluide galvanique; septembre 1801.

6. Sur les mouvements des substances odorantes placées sur l'eau; septembre 1801.

7. Sur la propagation du son; juin 1802.

8. Sur les courbes tautochrones; avril 1803.

9. Quelle est l'influence de l'oxydation sur la colonne électrique de Volta; juillet 1803.

10. Sur les pierres météoriques; août 1803.

11. Sur la loi mathématique de la propagation de la chaleur; juillet 1804.

12. Sur les variations du magnétisme terrestre à différentes latitudes (en commun avec Humboldt); octobre 1804.

13. Sur la formation de l'eau par la compression, et sur la nature de l'étincelle électrique; décembre 1804.

2e SÉRIE OU NOUVEAU BULLETIN.

14. Sur l'influence de l'humidité et de la chaleur dans les réfractions; août 1807, t. Ier.

15. Sur l'analyse comparée de l'arragonite et du carbonate de chaux rhomboïdal (en commun avec Thenard); 14 septembre 1807.

16. Sur la production du son dans les vapeurs; novembre 1807.

17. Expériences sur la mesure du pendule à secondes, sur différents points de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et l'île de Formentera; août 1808.

18. Sur les réfractions extraordinaires qui s'observent très-près de l'horizon; 8 août 1808.

19. Sur la propagation du son à travers les corps solides, et à travers l'air dans des tuyaux cylindriques très-allongés; 7 novembre 1808.

20. Sur l'attraction des sphéroïdes; mars 1812, t. III.

21. Sur de nouveaux rapports entre la réflexion et la polarisation de la lumière; 1er juin 1812.

22. Suite du précédent Mémoire; 15 juin 1812.

23. Sur un nouveau genre de besicles inventé par Wollaston; septembre 1813.

24. Nouvelle application de la théorie des oscillations de la lumière; 27 décembre 1813, t. IV.

25. Sur les propriétés physiques que les molécules lumineuses acquièrent en traversant les cristaux doués de la double réfraction; 22 mai 1814.

26. Découverte d'une différence physique dans la nature des forces polarisantes de certains cristaux; 25 avril 1814.

27. Sur un mode particulier de polarisation qui s'observe dans la tourmaline; janvier 1815.

28. Sur la nature des forces qui produisent la double réfraction; janvier 1815.

29. Lettre de M. Brewster à M. Biot, et Note de M. Biot; janvier 1815.

30. Expériences de MM. Brewster et Biot sur les larmes bataviques; avril 1815.

31. Sur une loi remarquable qui s'observe dans les oscillations des particules lumineuses, lorsqu'elles traversent obliquement des lames minces de chaux sulfatée ou de cristal de roche taillées parallèlement à l'axe de cristallisation; 28 juin 1815.

32. Sur une manière d'imiter artificiellement les phénomènes des couleurs produites par l'action des lames minces de mica sur des rayons polarisés; 29 mai 1815.

33. Phénomènes de polarisation successive, observés dans des fluides homogènes; 25 octobre 1815.

34. Rapport sur un Mémoire de MM. Dulong et Petit, relatif aux lois de la dilatation des solides, des liquides et des fluides élastiques, à toutes les températures; juin 1815.

35. Sur la loi de Newton relative à la communication de la chaleur; 28 décembre 1815, t. V.

36. Sur le développement des forces polarisantes par la pression; janvier 1816.

37. Recherches sur la diffraction de la lumière (en commun avec M. Pouillet); mars 1816.

38. Nouvelles épreuves sur la vitesse inégale avec laquelle l'électricité circule dans divers appareils électromoteurs; mai 1816.

39. Sur le jeu des anches; juin 1816.

40. Comparaison du sucre et de la gomme arabique dans leur action sur la lumière polarisée; juillet 1816.

41. Construction d'un colorigrade; 2 septembre 1816.

42. Observations qui prouvent l'indépendance absolue des forces polarisantes qui font osciller la lumière, et de celles qui la font tourner; septembre 1816.

43. Remarques sur les sons que rend un tuyau d'orgue rempli successivement de différents gaz; novembre 1816.

44. Nouvelles expériences sur le développement des forces polarisantes par la compression, dans tous les sens des cristaux: janvier 1817.

45. Sur la cristallisation du mica; janvier 1818, t. VI.

46. Sur la cristallisation du sucre de canne; février 1818.

47. Sur un perfectionnement du colorigrade; 15 juin 1818.

48. Sur l'utilité des lois de la polarisation de la lumière pour manifester l'existence et la nature des systèmes cristallins; 22 juin 1818.

49. Nouveaux faits sur la polarisation de la lumière; août 1818.

50. Sur quelques résultats scientifiques des observations faites dans l'expédition anglaise au Pôle Nord; novembre 1818.

51. Sur la longueur du pendule à secondes, observée à Unst, la plus boréale des îles Shettland; 1819.

52. De l'influence que la réfraction ordinaire et la réfraction extraordinaire exercent sur l'absorption des rayons lumineux, dans leur passage à travers certains corps cristallisés; juin 1819.

53. Sur la diversité des couleurs qu'offrent certains minéraux, lorsque les rayons lumineux les traversent en différents sens; septembre 1819.

54. Sur une nouvelle propriété qu'acquièrent les lames de verre, quand elles exécutent des vibrations longitudinales; 17 janvier 1820.

55. Sur les lois de la double réfraction et de la polarisation dans les corps régulièrement cristallisés; 29 mai 1819, t. VII.

56. Sur la double réfraction de l'euclase et de la topaze jaune du Brésil; 1820.

57. Examen optique de la structure cristalline du kannelstein (Essonite de Haüy); 1820.

58. Sur la structure de la substance verte qui se trouve dans les cavités de la masse de fer natif découverte en Sibérie par Pallas; 1820.

59. Sur l'apophyllite; 1820.

60. Sur la longueur absolue du pendule à secondes, mesurée en Angleterre et en Ecosse par le procédé de Borda, etc.; juillet 1820.

2° COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome Ier, 1835.

61. Moyen de déterminer, à l'aide des méthodes optiques, les mélanges ou les combinaisons chimiques; p. 66.

62. Sur une relation très-simple qui existe dans les solutions d'acide tartrique entre leurs proportions constituantes et leur densité; p. 340.

63. Sur les propriétés moléculaires de l'acide tartrique; p. 457.

64. Composition de l'air dissous dans l'eau puisée à diverses profondeurs. — Instrument destiné à puiser de l'eau à de grandes profondeurs; p. 410, 416.

Tome II, 1836.

65. Méthodes mathématiques et expérimentales pour discerner les mélanges et les combinaisons, etc.; p. 53.

66. Sur la polarisation des rayons calorifiques (en commun avec Melloni); p. 194.

67. Sur un Mémoire de Puissant relatif à une nouvelle détermination de la longueur de l'arc compris entre les parallèles de Montjouy et de Formentera (en commun avec Arago); p. 450.

68. Examen comparatif du sucre de maïs et du sucre de betterave; p. 464.

69. Sur une nouvelle relation physique entre les éléments des corps naturels et les affections propres des divers rayons simples; p. 540.

70. Sur un Mémoire de Fresnel; p. 546, 565.

71. Sur les acides tartrovinique et tartrométhylique; p. 610.

Tome III, 1836.

72. Sur les réfractions astronomiques; p. 237, 504.

73. Sur la constitution de l'atmosphère terrestre; p. 597.

74. Sur le météore périodique du 13 novembre; p. 663.

Tome IV, 1837.

75. Sur des fleurs de jacinthe blanc injectées en rouge par le suc de phytolaca; p. 12.

76. Sur des matières pierreuses qui ont été employées en Chine comme substances alimentaires; p. 301.

77. Sur la correspondance de Newton et de Flamsteed; p. 350.

78. Exposé historique de l'ordre dans lequel les phénomènes de la polarisation circulaire ont été successivement découverts et étudiés; p. 917.

Tome V, 1837.

79. Déplacement du plan de polarisation dans l'intérieur des liquides, p. 668.

80. Sur plusieurs points fondamentaux de mécanique chimique; p. 729, 767, 856.

81. Sur la différence physique qui existe entre l'amidon et la dextrine; p. 905.

Tome VI, 1838.

82. Sur le calcul des réfractions atmosphériques; p. 71.

83. Fin du Mémoire sur plusieurs points de mécanique chimique; p. 153.

84. Sur la vraie constitution physique de l'atmosphère terrestre; p. 390, 479.

85. Sur des formules relatives au volume de la vapeur en fonction de la pression seulement; p. 389, 509.

86. Sur la constitution comparée de l'atmosphère sous le parallèle de Paris et à l'équateur; p. 579.

87. Sur l'emploi de la lumière polarisée pour manifester la différence des combinaisons isomériques; p. 663.

88. Sur les hauteurs relatives des signaux terrestres, conclues de leurs distances zénithales réciproques; p. 840.

Tome VII, 1838.

89. Discussion avec Puissant sur le sujet précédent; p. 93, 253, 291, 543, 848, 1038.

90. Sur un moyen de puiser de l'eau de mer à de grandes profondeurs; p. 203.

Tome VIII, 1839.

91. Sur l'application du calcul des probabilités à une question de géodésie; p. 1, 4, 37.

92. Sur les découvertes photographiques de MM. Daguerre et Talbot; p. 6, 172, 245, 246, 302, 409.

93. Sur l'existence d'une condition physique qui assigne à l'atmosphère terrestre une limite qu'elle ne peut dépasser; p. 69, 91; et t. IX, 1839, p. 174.

94. Sur la nature de la radiation émanée de l'étincelle électrique (en commun avec M. Becquerel); p. 223.

95. Sur la nature des radiations qui excitent la phosphorescence; p. 259, 315.

96. Sur la théorie des substitutions chimiques; p. 530, 622.

97. Sur le pouvoir de la radiation atmosphérique comme agent chimique; p. 598.

98. Sur l'origine du pouvoir rotatoire du cristal de roche; p. 679, 683.

TOME IX, 1839.

99. Sur les radiations chimiques; p. 169, 173, 200, 576, 713, 719.

100. Sur la constitution moléculaire des produits isomères au camphre; p. 621.

101. Expériences à faire relativement à la question d'isomérie; p. 655.

102. Sur l'importance de l'étude de certains produits chimiques au moyen des méthodes optiques; p. 825.

TOME X, 1840.

103. Sur la mesure des réfractions terrestres; p. 8.

104. Utilité de l'étude des caractères optiques pour diriger certaines opérations dans la fabrication et le raffinage des sucres; p. 264.

TOME XI, 1840.

105. Sur l'essence liquide sécrétée par le Dryabalanops camphora; p. 371.

106. Sur la construction et l'usage des appareils destinés à éprouver le pouvoir rotatoire des liquides; p. 413.

107. Mémoire sur la chimie atomique; p. 603, 620.

108. Mémoire sur l'emploi des caractères optiques comme diagnostic immédiat du diabète sucré; p. 991, 1028.

TOME XII, 1841.

109. Sur le développement des forces élastiques de la vapeur aqueuse; p. 150.

110. Sur les radiations chimiques de la lumière; p. 170.

111. Sur quelques points relatifs à l'astronomie et aux instruments d'optique; p. 269.

112. Sur la conservation des bois au moyen de l'injection de diverses dissolutions; p. 357.

113. Sur un Mémoire de Gauss relatif à l'optique analytique; p. 407.

114. Préparation des papiers photographiques par M. Talbot; p. 492, 1055.

115. Sur la formation directe des coefficients généraux des systèmes optiques; p. 519, 523.

116. Sur les effets mécaniques de la vaporisation du camphre; p. 621, 626, 667, 673.

117. Recherches sur la polarisation lamellaire; p. 741, 803, 871, 967, 1121, 1132.

Tome XIII, 1841.

118. Phénomènes de polarisation produits par les corps cristallisés, en vertu d'une action non moléculaire; p. 155.

119. Particularités relatives aux cristaux d'apophyllite; p. 839.

120. Sur les lunettes achromatiques à oculaires multiples; p. 1039.

Tome XIV, 1842.

121. Examen d'une substance ayant l'apparence de la manne naturelle; p. 49.

Tome XV, 1842.

122. Sur les produits sucrés du maïs (en commun avec Soubeiran); p. 523.

123. Sur l'emploi des propriétés optiques pour l'analyse quantitative des solutions qui contiennent des substances douées du pouvoir rotatoire; p. 619.

124. Sur le degré de précision des caractères optiques dans leur application à l'analyse des matières sucrées, etc.; p. 693.

125. Sur un point de l'histoire de l'optique relatif aux phénomènes de la polarisation; p. 962.

Tome XVI, 1843.

126. Sur l'application des propriétés optiques à l'analyse quantitative des mélanges liquides ou solides, etc.; p. 619.

127. Sur la latitude de l'extrémité australe de l'arc méridien de France et d'Espagne; p. 1019.

Tome XVII, 1843.

128. Sur l'identité des modifications imprimées à la lumière polarisée par les corps fluides dans l'état de mouvement ou de repos; p. 1209.

Tome XVIII, 1844.

129. Sur la découverte de la variation lunaire; p. 49, 103.

130. Travail mathématique sur l'interpolation; p. 545.

131. Sur les phénomènes de polarisation produits à travers les globules féculacés; p. 795.

Tome XIX, 1844.

132. Applications diverses d'une nouvelle théorie des instruments d'optique; p. 495.

Tome XX, 1845.

133. Sur un exposé de la Théorie de la Lune, rédigé par un auteur arabe du xe siècle; p. 823, 1056, 1309, 1319.

134. Sur les moyens d'observation que l'on peut employer pour la mesure des pouvoirs rotatoires; p. 1747, 1811.

Tome XXI, 1845.

135. Instructions pratiques sur l'observation des propriétés optiques appelées rotatoires, etc.; p. 97.

136. Sur un appareil de M. Soleil; p. 428.

137. Sur les appareils à deux rotations; p. 453.

138. Sur les phénomènes rotatoires opérés dans le cristal de roche, p. 643; et t. XXII, 1846, p. 93.

139. Sur divers points d'astronomie ancienne, etc.; p. 1083.

Tome XXII, 1846.

140. Sur deux Mémoires de Fresnel que l'on croyait égarés; p. 405.

Tome XXIII, 1846.

141. Rapport sur un appareil construit par M. Ruhmkorff; p. 538.

Tome XXV, 1847.

142. Rapport sur un Mémoire de M. de Senarmont relatif à la conductibilité des corps cristallisés pour la chaleur; p. 289.

Tome XXVI, 1848.

143. Sur la période chaldéenne; p. 417.

Tome XXVII, 1848.

144. Sur trois observations d'Hipparque; p. 161.

145. Sur l'utilité de l'examen des urines au moyen de l'appareil optique; p. 617.

146. Rapport sur un Mémoire de M. Pasteur; p. 401.

Tome XXVIII, 1849.

147. Sur les propriétés optiques de l'acide camphorique; p. 321.

148. Sur un problème d'analyse indéterminée; p. 576.

149. Résumé de chronologie astronomique; p. 687.

Tome XXIX, 1849.

150. Sur la manifestation du pouvoir rotatoire moléculaire dans les corps solides; p. 681.

151. Rapport sur un Mémoire de M. Pasteur, p. 433.

Tome XXX, 1850.

152. Recherches relatives à l'action de l'eau sur la lumière; p. 281.

153. Opérations géodésiques exécutées en 1836 et 1837 dans la province Circaucasienne; p. 539.

154. Sur une Note de M. Michal relative à la découverte de la variation lunaire; p. 637.

155. Sur les propriétés moléculaires acquises par l'acide tartrique dans l'acte de la fusion; p. 721.

Tome XXXI, 1850.

156. Détermination générale des lois de variation du pouvoir rotatoire, etc.; p. 101.

157. Rapport sur un Mémoire de M. Pasteur; p. 601.

Tome XXXIII, 1851.

158. Rapport sur un Mémoire de M. Pasteur relatif aux acides aspartique et malique; p. 549.

Tome XXXIV, 1852.

159. Sur la populine et la salicine artificielles; p. 149, 606.

160. Sur quelques effets singuliers de la foudre; p. 822.

Tome XXXV, 1852.

161. Sur les substances douées de pouvoirs rotatoires, etc.; p. 233.

162. Sur l'application de la théorie de l'achromatisme aux pouvoirs rotatoires; p. 613.

Tome XXXVI, 1853.

163. Sur l'histoire de l'acide racémique; p. 18.

164. Recherches de quelques dates absolues qui peuvent se conclure de dates vagues inscrites sur des monuments égyptiens; p. 245.

Tome XXXVII, 1853.

165. Sur un calendrier astronomique et astrologique trouvé à Thèbes; p. 227.

Tome XXXIX, 1854.

166. Discussion avec M. Faye sur les réfractions astronomiques; p. 445, 517, 567, 708, 817, 933.

Tome XL, 1855.

167. Sur les tables de réfractions; p. 83, 145, 386, 498, 597.

168. Sur une découverte faite par M. Marbach; p. 793.

Tome XLI, 1855.

169. Sur les observatoires météorologiques permanents que l'on se propose d'établir en Algérie; p. 1035, 1177.

Tome XLII, 1856.

170. Sur une communication de M. Pasteur; p. 351.

171. Sur une communication de M. Jeanjean; p. 859.

Tome XLIII, 1856.

172. Sur un nouveau fait découvert par M. Marbach; p. 705, 800.

Tome XLV, 1857.

173. Sur la mesure de l'arc du méridien entre la mer Glaciale et le Danube; p. 513, 605, 612.

174. Nouvelles relations entre les formes cristallines et les propriétés thermo-électriques; p. 705.

Tome XLVII, 1858.

175. Sur une dissertation de M. Albéri relative à l'horloge à pendule de Galilée; p. 433.

Tome XLVIII, 1859.

176. Sur la formation artificielle de l'acide tartrique; p. 377.

Tome L, 1860.

177. Sur l'équilibre des vapeurs; p. 1109.

Tome LI, 1860.

178. Sur la production de l'acide racémique artificiel; p. 153.

179. Sur une note du Dr Brewster relative à un point de l'histoire de l'optique; p. 465.

3° JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

180. Considérations sur les intégrales des équations aux différences finies; 11e cahier, t. IV, p. 182.

181. Sur les axes de suspension synchrones; 13e cahier, t. VI, p. 242.

182. Sur les surfaces catacaustiques et diacaustiques dans la sphère; 28e cahier, t. XVII, p. 95.

4° CONNAISSANCE DES TEMPS.

183. Sur la formule de Borda pour le calcul de la longueur du pendule à secondes; 1827, p. 394.

184. Mémoire sur la mesure des azimuts dans les opérations géodésiques, et en particulier sur l'azimut oriental de la chaîne de triangles qui s'étend de Bordeaux à Fiume en Italie; 1830, p. 70.

185. Analyse des ouvrages originaux de Napier relatifs à l'invention des logarithmes; 1838, p. 3.

186. Sur les réfractions astronomiques; 1839, p. 3.

187. Mémoire sur la constitution de l'atmosphère terrestre, etc.; 1841, p. 3.

188. Mémoire sur la mesure théorique et expérimentale de la réfraction terrestre, etc.; 1842, p. 3.

189. Addition au Mémoire précédent; 1843, p. 97.

190. Sur le développement des forces élastiques de la vapeur aqueuse; 1844, p. 3.

5° ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE.

1re SÉRIE.

Tome LIII, 1805.

191. Sur la formation de l'eau par la seule compression, etc.; p. 321.

Tome LXI, 1807.

192. Lettre de M. Biot à M. Berthollet sur l'action chimique et sur la propriété eudiométrique de l'eau pure; p. 271.

Tome LXXXV, 1813.

193. Rapport sur un Mémoire de M. Bérard relatif aux propriétés physiques et chimiques des divers rayons qui composent la lumière solaire; p. 309.

Tome XCIV, 1815.

194. Examen comparé de l'intensité d'action que la force répulsive

extraordinaire du spath d'Islande exerce sur les molécules lumineuses de diverses couleurs; p. 281.

2e SÉRIE.

Tome II, 1816.

195. Extrait par M. Berthollet du Traité de Physique expérimentale et mathématique de M. Biot; p. 54.

Tome III, 1816.

196. Note sur un passage de la Bibliothèque universelle; p. 435.

197. Nouvelles expériences sur le développement des forces polarisantes par la compression dans tous les sens des cristaux; p. 386.

Tome VIII, 1818.

198. Sur l'utilité des lois de la polarisation de la lumière pour manifester l'existence et la nature des systèmes cristallins; p. 438.

Tome IX, 1818.

199. Extrait d'un Mémoire sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux; p. 372.

Tome XIII, 1820.

200. Sur une nouvelle propriété physique qu'acquièrent les lames de verre quand elles exécutent des vibrations longitudinales; p. 151.

Tome XV, 1820.

201. Sur le magnétisme de la pile de Volta; p. 222.

202. Avertissement sur la 2e édition du Traité de Physique élémentaire; p. 331.

Tome XVI, 1821.

203. Notice historique sur M. Petit; p. 327.

Tome XVII, 1821.

204. Remarques sur un Rapport lu, le 4 juin 1821, à l'Académie des Sciences par MM. Arago et Ampère; p. 225, 393.

Tome XXIV, 1823.

205. Sur les diverses amplitudes d'excursion que les variations diurnes peuvent acquérir, quand on les observe dans un système de corps aimantés réagissant les uns sur les autres; p. 140.

Tome LII, 1833.

206. Sur un caractère optique à l'aide duquel on reconnaît immédiatement les sucs végétaux qui peuvent donner du sucre analogue au sucre de canne, et ceux qui ne peuvent donner que du sucre semblable au sucre de raisin; p. 58.

207. Mémoire sur les modifications que la fécule et la gomme subissent sous l'influence des acides (en commun avec M. Persoz); p. 72.

Tome LXXVI, 1840.

208. Sur la construction des appareils destinés à observer le pouvoir rotatoire des liquides; p. 401.

3e SÉRIE.

Tome IX, 1843.

209. Sur les propriétés optiques des alcalis végétaux; p. 244.

Tome X, 1844.

210. Sur l'emploi de la lumière polarisée pour étudier diverses questions de mécanique chimique; p. 5, 385; et t. XI, p. 82.

Tome XIII, 1845.

211. Sur l'action que le cymophane exerce sur la lumière polarisée; p. 335.

Tome XVIII, 1846.

212. Sur la manière de former des mélanges liquides exerçant un pouvoir rotatoire d'intensité assignée; p. 81.

213. Sur un appareil construit par M. Ruhmkorff, pour faciliter l'exhibition des phénomènes optiques produits par les corps transparents, lorsqu'ils sont placés entre les pôles contraires d'un aimant d'une grande puissance; p. 318.

Tome XXVIII, 1850.

214. Détail des expériences faites par la Commission de l'Académie des Sciences pour vérifier les relations établies par M. Pasteur entre les actions rotatoires de ses deux nouveaux acides et celle qu'exerce l'acide tartrique cristallisé; p. 99.

215. Sur la manifestation du pouvoir rotatoire moléculaire dans les corps solides; p. 351.

Tome XXIX, 1850.

216. Sur l'état moléculaire de l'acide tartrique qui a été mis en fusion par la chaleur, avec ou sans perte de sa propre substance; p. 35, 341.

217. Détermination générale des lois des variations du pouvoir rotatoire, dans les systèmes liquides ternaires, où un corps doué de ce pouvoir se trouve en présence de deux corps inactifs, qui ne le décomposent pas chimiquement; p. 430.

Tome XXXVI, 1852.

218. Expériences ayant pour but d'établir que les substances douées du pouvoir rotatoire, lorsqu'elles sont dissoutes dans des milieux inactifs, qui ne les décomposent pas chimiquement, contractent avec eux une combinaison passagère, sans proportions fixes, etc.; p. 257.

219. Sur l'application de la théorie de l'achromatisme à la compensation des mouvements angulaires que le pouvoir rotatoire imprime aux plans de polarisation des rayons lumineux d'inégale réfrangibilité; p. 405.

Tome LIX, 1860.

220. Introduction aux recherches de mécanique chimique, dans lesquelles la lumière polarisée est employée auxiliairement comme réactif; p. 206.

221. Appendice sur un point de l'histoire de l'optique relatif aux phénomènes de la polarisation de la lumière; p. 326.

6° MÉMOIRES DE L'INSTITUT (CLASSE DES SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES).

TOME IV, 1803.

222. Recherches sur l'intégration des équations différentielles partielles et sur les vibrations des surfaces; p. 21.

TOME V, 1804.

223. Rapport sur les expériences de Volta; p. 195.

TOME VI, 1805.

224. Recherches sur le calcul aux différences partielles et sur les attractions des sphéroïdes; p. 201.

TOME VII, 1806.

225. Sur les affinités des corps pour la lumière et particulièrement sur les forces réfringentes des différents gaz (en commun avec Arago); p. 301.

TOME X, 1809.

226. Recherches sur les réfractions extraordinaires qui s'observent très-près de l'horizon; p. 1.

TOME XII, 1811.

227. Mémoire sur de nouveaux rapports qui existent entre la réflexion et la polarisation de la lumière par les corps cristallisés; p. 135.

TOME XIII, 1812.

228. Mémoire sur un nouveau genre d'oscillation que les molécules de la lumière éprouvent en traversant les corps cristallisés; p. 1.

229. Sur une nouvelle application de la théorie des oscillations de la lumière; p. 1, 2e partie.

230. Discours prononcé aux funérailles de Malus; supplément à la 2e partie, p. 1.

TOME XIV, 1813.

231. Observations sur la nature des forces qui partagent les rayons lumineux dans les corps doués de la double réfraction; p. 221.

7° MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

232. Mémoire sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux; 1817, t. II, p. 41.

233. Sur les lois générales de la double réfraction et de la polarisation dans les corps régulièrement cristallisés; 1818, t. III, p. 177.

234. Notice sur les voyages entrepris pour mesurer la courbure de la terre et la variation de la pesanteur terrestre sur l'arc du méridien compris entre les îles Pythiuses et les îles Shettland; 1818, t. III, p. LXXIII.

235. Mémoire sur la figure de la terre; 1827, t. VIII, p. 1.

236. Sur la polarisation circulaire et sur ses applications à la chimie organique; 1832, t. XIII, p. 39.

237. Sur les modifications que la fécule et la gomme subissent sous l'influence des acides (en commun avec M. Persoz); 1832, t. XIII, p. 437.

238. Recherches sur l'année vague des Egyptiens; 1832, t. XIII, p. 547.

239. Rapport sur les expériences de Melloni, relatives à la chaleur rayonnante; t. XIV, p. 433.

240. Méthodes mathématiques et expérimentales pour discerner les mélanges et les combinaisons chimiques définies ou non définies, etc.; 1836, t. XV, p. 93.

241. Sur plusieurs points fondamentaux de mécanique chimique; 1837, t. XVI, p. 229.

242. Sur l'existence d'une condition physique qui assigne à l'atmosphère terrestre une limite supérieure d'élévation, etc.; 1839, t. XVII, p. 769.

243. Sur la polarisation lamellaire; 1841, t. XVIII, p. 539.

244. Sur les lunettes achromatiques à oculaires multiples; 1841, t. XIX, p. 3.

245. Sur la latitude de l'extrémité australe de l'arc méridien de France et d'Espagne; 1843, t. XIX, p. 359.

246. Sur divers points d'astronomie ancienne et en particulier sur la période sothiaque; 1845, t. XX, p. 1.

247. Sur les phénomènes rotatoires opérés dans le cristal de roche; 1845, t. XX, p. 221.

248. Résumé de chronologie astronomique; 1849, t. XXII, p. 209.

249. Rapport sur un Mémoire de M. Pasteur touchant les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le pouvoir rotatoire moléculaire; 1853, t. XXIII, p. 67.

250. Rapport sur un Mémoire de M. Pasteur relatif aux acides aspartique et malique; 1853, t. XXIII, p. 339.

251. Recherches de quelques dates absolues qui peuvent se conclure de dates vagues inscrites sur des monuments égyptiens; 1853, t. XXIV, p. 265.

252. Sur un calendrier astronomique et astrologique trouvé à Thèbes en Egypte dans les tombeaux de Ramsès VI et de Ramsès IX; 1853, t. XXIV, p. 549.

8° MÉMOIRES DE L'INSTITUT (SAVANTS ÉTRANGERS).

253. Mémoire sur les équations aux différences mêlées; 1799, t. I, p. 296.

9° JOURNAL DES SAVANTS.

254. A practical treatise on propelling vessels by steam.... Traité pratique sur l'art de faire marcher les bâtiments à l'aide de la vapeur, par R. Buchanan; septembre 1816, p. 3.

255. Voyage en Norwége et en Laponie pendant les années 1806, 1807 et 1808, par L. de Buch; novembre 1816, p. 131.

256. A practical treatise on gaz-light.... Traité pratique de l'éclairage par le gaz inflammable, par F. Accum; janvier 1817, p. 12.

257. Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut, année 1814; mars 1817, p. 143.

258. Experimental outlines for a new theory of colours.... Esquisse expérimentale d'une nouvelle théorie des couleurs, etc., par J. Reade; avril 1817, p. 102.

259. Résumé des procédés découverts par M. Davy pour prévenir les explosions dans les mines de houille, etc.; mai 1827, p. 304.

260. A voyage round the world.... Voyage autour du monde de 1806 à 1812, par Archibald Campbell; juin 1817, p. 304.

261. Traité d'Économie politique, etc., par J.-B. Say; juillet 1817, p. 396.

262. Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1818. — Connaissance des Temps pour 1820; mars 1818, p. 131.

263. Histoire de l'Astronomie, par Delambre; septembre 1818, p. 550; avril 1819, p. 229.

264. Mission from Cape-Coast-Castle to Ashantees.... Mission envoyée du fort de Cape-Coast, dans le pays des Ashantées, etc., par T. E. Bowdich; août 1819, p. 451.

265. Considérations sur la nature et les causes de l'aurore boréale; juin 1820, p. 342; juillet, p. 387; août, p. 460.

266. Sur l'aimantation imprimée aux métaux par l'électricité en mouvement; avril 1821, p. 221.

267. Traité des parafoudres et des paragrêles en cordes de paille, etc., par Lapostolle; mai 1821, p. 287.

268. Sur le mode d'éducation du peuple en Ecosse, etc.; mars 1822, p. 137.

269. Note sur le tremblement de terre du 19 février 1822; avril 1822, p. 241.

270. Extrait d'un discours prononcé aux funérailles de M. Delambre; septembre 1822, p. 568.

271. An account of experiments. . Exposé d'expériences pour déterminer la figure de la terre, etc., par Ed. Sabine; novembre 1825, p. 643; janvier 1826, p. 3.

272. Extrait d'un discours prononcé aux funérailles de Laplace; mars 1827, p. 187.

273. Histoire de l'Astronomie au XVIIIe siècle, par Delambre; avril 1828, p. 195.

274. An account of experiments.... Relation d'expériences pour déterminer la figure de la terre, etc., par Ed. Sabine; avril 1829, p. 205.

275. Reflections on the decline of science in England.... Réflexions sur la décadence des sciences en Angleterre, etc., par Ch. Babbage; janvier 1831, p. 41.

276. Memoirs of the Astronomical Society of London.... Mémoires publiés par la Société astronomique de Londres depuis 1822 jusqu'à 1830; août 1831, p. 489; octobre, p. 611; novembre, p. 652; février 1832, p. 65; mars, p. 138.

277. Mécanique céleste par Mme Sommerville; janvier 1832, p. 28.

278. The life of sir Isaac Newton.... Vie de sir Isaac Newton, par D. Brewster; avril 1832, p 193; mai, p. 263; juin, p. 321.

279. Cours de Botanique, par A. Pyr. de Candolle; avril 1833, p. 243.

280. Christiani Hugenii aliorumque... . Exercitationes mathematicæ et philosophicæ.... Exercices philosophiques et mathématiques de Chr. Huyghens, etc., par P.-J. Uylenbroek; mai 1834, p. 29.

281. Memoirs of John Napier of Merchiston.... Mémoires sur Jean Napier de Merchiston, etc., par Mark Napier; mars 1835, p. 151; mai, p. 257.

282. Analyse et restitution de l'ouvrage original de Napier intitulé : Mirifici logarithmorum canonis constructio ; juin 1835, p. 354.

283. An account of the rev. John Flamsteed.... Détails historiques sur la vie de John Flamsteed, etc., par F. Baily; mars 1836, p. 156; avril, p. 205; novembre, p. 641.

284. Analyse des Tables de réfraction construites par Newton, etc.; décembre 1836, p. 735.

285. Address delivered at the anniversary meeting of the royal Society.... Discours prononcé à la réunion anniversaire de la Société royale de Londres par le duc de Sussex ; février 1837, p. 74.

286. Astoria.... Astoria ou récit d'une expédition au delà des montagnes Rocheuses, par Wasingthon Irving; mars 1837, p. 137; avril, p. 228; février 1838, p. 99; mars, p. 161.

287. Traités chinois sur la culture des mûriers, etc., par St. Julien; août 1837, p. 463.

288. Stellarum duplicium et multiplicium mensuræ micrometricæ.... Mesures micrométriques des étoiles doubles et multiples, par W. Struve; mai 1838, p. 297.

289. Sur les effets chimiques des radiations et sur l'emploi qu'en a fait M. Daguerre, etc.; mars 1839, p 173.

290. L'Irlande sociale, politique et religieuse, par M. G. de Beaumont; décembre 1839; p. 705.

291. Ueber die Zeitrechnung der Chinesen.... Sur la Chronologie des Chinois, par Ludwig Ideler; décembre 1839, p. 711; janvier 1840, p. 27; février, p. 73; mars, p. 142; avril, p. 227; mai, p. 264; juin, p. 372.

292. China, its state and prospects.... La Chine, son état actuel et son avenir, etc., par W.-H. Medhurst; mars 1841, p. 129.

293. Traité des instruments astronomiques des Arabes, par Aboul-Hassan; septembre 1841, p. 513; octobre, p. 602; novembre, p. 659.

294. Traduction et examen d'un ancien ouvrage chinois, intitulé : Tcheou-pei... , par Ed. Biot; août 1842, p. 449.

295. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, etc.; novembre 1842, p. 641.

296. Tables pour le calcul des syzygies écliptiques et non écliptiques, par M. Largeteau, etc.; juillet 1843, p. 434; août, p. 481.

297. Sur un Traité arabe relatif à l'astronomie; septembre 1843, p. 513; octobre, p. 609; novembre, p. 694; décembre, p. 719.

298. Principales Tables de M. Mendoza, etc., par M. Richard; août 1844. p. 471; septembre, p. 524.

299. The war in China.... Récit de l'expédition anglaise en Chine, etc., par Duncan Mac Pherson; octobre 1844, p. 577.

300. Réclamation relative à l'annonce d'un Mémoire de M. Sédillot sur les instruments astronomiques des Arabes; octobre 1844, p. 640.

301. Sur les Nacshatras ou mansions de la Lune chez les Hindous, etc.; janvier 1845, p. 39.

302. Sur un exposé de la Théorie de la Lune, rédigé par un auteur arabe du xe siècle; mars 1845, p. 149.

303. Introduction à l'histoire du Buddhisme indien, par E. Burnouf, etc.; avril 1845, p. 233; mai, p. 257; juin, p. 337.

304. Sur les modifications qui s'opèrent dans le sens de la polarisation

des rayons lumineux, etc.; 1846, février, p. 93; mars, p. 145; avril, p. 214.

305. Sur la planète nouvellement découverte par M. Le Verrier, etc.; 1846, octobre, p. 577; novembre, p. 641; décembre, p. 750; 1847, janvier, p. 18; février, p. 65; mars, p. 180.

306. Sur le catalogue d'étoiles de Ptolémée; juillet 1847, p. 406.

307. Description de l'observatoire astronomique central de Poulkova, par F.-G.-W. Struve, etc.; 1847, septembre, p. 513; octobre, p. 610.

308 Cours élémentaire de Chimie, par M. V. Regnault; 1848, février, p. 65; mars, p. 138; avril, p. 209.

309. Sur trois observations d'Hipparque; 1848, août, p. 449; septembre, p 569.

310. Narrative of the United-States exploring expedition... Relation du voyage de découvertes exécuté par ordre des Etats-Unis d'Amérique de 1838 à 1842, etc., par C. Wilkes; 1848, novembre, p. 672; décembre, p. 709; 1849, février, p. 65; avril, p. 251.

311. Note relative aux instruments et aux procédés pratiques des gromatici veteres; 1849, avril, p. 238; mai, p. 313.

312. Recherches chimiques sur la respiration des animaux de diverses classes, par MM. V. Regnault et J. Reiset; 1849, août, p. 490; septembre, p. 513; octobre, p. 577; novembre, p. 691.

313. Une anecdote relative à M. Laplace; février 1850, p. 65.

314. Theonis Smyrnæi platonici liber de Astronomia.... Traduit du grec en latin, par M. Th. Martin, etc.; avril 1850, p. 193.

315. Notice sur des manuscrits inédits du P. Gaubil et du P. Amiot, etc.; mai 1850, p. 302.

316. Report of the royal astronomer.... Rapport présenté par l'astronome royal, etc.; juillet 1850, p. 385.

317. Recherches sur l'agriculture et l'horticulture des Chinois, etc., par M. le baron Léon d'Hervey-Saint-Denys; novembre 1850, p. 641.

318. Notice sur Gay-Lussac, etc.; décembre 1850, p. 705.

319. Le Tcheou-li ou rites des Tcheou, traduit pour la première fois par feu Ed. Biot, etc.; 1851, janvier, p. 1; février, p. 65.

320. Considérations sur les bêtes à laine au XIXe siècle. etc.; 1851, juillet, p. 385.

321. Etudes sur la condition de la classe agricole en Normandie, etc., par M. L. Delisle; 1851, septembre. p. 536; octobre, p. 581; novembre, p. 657.

322. Correspondance of sir Isaac Newton and professor Cotes.... Correspondance de sir Isaac Newton et du professeur Cotes, etc., publiée par J. Eddleston; 1852, avril, p. 217; mai, p. 269; juin, p. 400; juillet, p. 458; août, p. 522; octobre, p. 663.

323. Détermination de l'équinoxe vernal de 1853 en Egypte, etc., par M. Mariette; 1855, mai, p. 269; juin, p. 347; juillet, p. 419.

324. Sur les restes de l'ancienne uranographie égyptienne que l'on pourrait retrouver aujourd'hui chez les Arabes, etc.; août 1855, p. 461.

325. Memoirs of the life, writings.... Mémoires sur la vie, les écrits et les découvertes de sir Isaac Newton, par sir D. Brewster, etc.; 1855, octobre, p. 589; novembre, p. 662.

326. Commercium epistolicum J. Collins.... Correspondance de

J. Collins, etc., publié par J.-B. Biot et F. Lefort, etc.; mars 1856. p. 142.

327. Annales de l'Observatoire de Paris, publiées par U.-J. Le Verrier, etc ; septembre 1856, p. 513.

328. Mémoire sur des observations planétaires, etc., par M. H. Brugsch, etc ; 1856, décembre, p. 705 ; 1857, janvier, p. 5.

329. Nouvelles recherches sur la division de l'année des anciens Egyptiens, par M. H. Brugsch ; 1857, avril, p. 221; mai, p. 288; juin, p. 353; août, p. 481; septembre, p. 549.

330. Tables de la Lune, etc., par P.-A. Hansen, etc ; 1857, octobre, p. 601; décembre, p. 729; 1858, janvier, p. 5.

331. Une conversation au Vatican; mars 1858, p. 137.

332. La vérité sur le procès de Galilée; 1858. juillet, p. 397; août, p. 461; septembre, p. 543; octobre, p. 607.

333. Dell' orologio a pendolo di Galileo Galilei, etc., par M. Eug. Albéri; novembre 1858, p. 661.

334. The Oriental astronomer. . L'astronome d'Orient, offrant un système complet d'astronomie indienne, etc.; 1859, avril, p. 197; mai, p. 271; juin, p. 369; juillet, p. 401, août, p. 475; septembre, p. 580.

335. Translation of the Sûrya-Siddhânta..... Traduction du Sûrya-Siddhânta, traité classique de l'astronomie indienne, etc., par le Rév. E.-B. Burgess, etc. ; 1860, août, p. 479; octobre, p. 596; novembre, p. 665 ; décembre, p. 763.

336. Précis de l'histoire de l'Astronomie chinoise; 1861, mai, p. 284; juin, p. 325; juillet, p. 420; août, p. 453; septembre, p. 573; octobre, p. 604.

10° MONITEUR UNIVERSEL.

337. Essai sur l'histoire générale des sciences pendant la Révolution française; 1803, p. 1302, 1327, 1347.

338. Lettre au Ministre de l'Intérieur à l'occasion d'un météore observé aux environs de Laigle; p. 1394.

339. Lettre aux auteurs de la Bibliothèque Britannique; 1804, p. 155.

340. Compte rendu du voyage aérostatique fait avec Gay-Lussac le 27 août 1804; p. 1499.

341. Note sur la formation de l'eau par la seule compression; 1805, p. 947.

342. Analyse du Traité de Géodésie de L. Puissant; 1806, p. 676.

343. Sur la théorie de l'action capillaire de Laplace; p. 709.

344. Sur la 2e édition du Traité de Physique de Haüy; p. 1150.

345. Sur le supplément à la Théorie de l'action capillaire de Laplace; 1807, p. 768.

346. Sur l'observation de M. Sage relative au paratonnerre de la Monnaie; p. 848.

347. Sur le voyage de Humboldt et de Bonpland; p. 1037.

348. Sur l'Exposition du système du monde de Laplace; 1808, p. 410.

349. Sur le Traité de la résolution des questions numériques, de Lagrange; p. 525.

350. Sur un ouvrage de A. de Humboldt, intitulé : Essai politique du royaume de la Nouvelle-Espagne; p. 714.

351. Compte rendu des expériences sur la propagation du son à travers les corps solides; p. 1256.

352. Notice sur les opérations faites en Espagne pour prolonger la méridienne de France, etc.; 1810, p. 24.

353. Sur la découverte de l'étain en France; p. 717.

354. Sur l'Annuaire du Bureau des Longitudes; 1811, p. 112.

355. Sur la fabrication en grand du flint-glass; p. 747, 750.

356. Sur la dissection de la lumière par des réflexions et des réfractions successives; p. 282.

357. Sur les recherches physico-chimiques de Gay-Lussac et Thenard; p. 417.

358. Sur le nautile marin de MM. Coëssin frères; p. 460.

359. Sur un Mémoire de J. Binet relatif aux moments d'inertie des corps; p. 702.

360. Sur l'Annuaire du Bureau des Longitudes; p. 1348.

361. De l'influence des sciences sur les préjugés populaires; 1812, p. 148.

362. Sur des Mémoires de Ramond relatifs à la formule barométrique; p. 494.

363. Sur de nouveaux rapports qui existent entre la réflexion et la polarisation de la lumière; p. 631.

364. Sur la polarisation de la lumière; 1813, p. 610.

365. Sur un nouveau genre de besicles inventé par Wollaston; p. 1044.

366. Sur l'esprit d'invention et de recherche dans les sciences; 1814, p. 30.

367. Sur la nature des forces qui produisent la double réfraction; 1815, p. 60.

368. Sur l'invention et l'utilité des bateaux à vapeur; 1816, p. 1055.

369. Note sur le voyage aux Orcades; 1817, p. 606.

370. Notice sur les opérations relatives à la détermination de la figure de la terre; 1818, p. 1183, 1187.

371. Notice sur la continuation des travaux entrepris pour déterminer la figure de la terre; 1819, p. 396.

372. Discours prononcé sur la tombe de Delambre; 1822, p. 1232.

373. Discours prononcé sur la tombe de Laplace; 1827, p. 424.

11° MERCURE DE FRANCE.

374. Sur les Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France; 1808, août, t. XXXIII, p. 348.

375. Traité de Navigation, par Dubourguet; octobre, t. XXXIV, p. 169.

376. Sur le Charlatanisme; novembre, p. 316, 357.

377. Sur deux voyages botaniques et agronomiques par M. de Candolle; décembre, p. 546.

378. Conversations sur la Chimie; 1809, mars, t. XXXV, p. 459.

379. Connaissance des temps ou des mouvements célestes; avril, t. XXXVI, p. 216.

380. Sur l'esprit de système; mai, p. 247.

381. Sur l'antiquité de l'empire de la Chine, prouvée par les observations astronomiques; mai, p. 343.

382. De la formation et de la décomposition des corps ; mai, p. 389.

383. Sur la manie d'écrire; juin, p. 503.

384. Sur l'état actuel des sciences mathématiques en Angleterre ; juin, p. 631.

385. Suite de l'article précédent; juillet, t. XXXVII, p. 69.

386. Tableau comparatif des résultats de la cristallographie et de l'analyse chimique relativement à la classification des minéraux par Haüy ; juillet, p. 197.

387. Système de chimie de Thompson ; août, p. 327.

388. Mémoires de physique et de chimie de la Société d'Arcueil ; août, p. 455.

389. Géographie élémentaire, par Hassenfratz ; septembre, t. XXXIX, p. 76.

390. Du calorique rayonnant, par P. Prévost ; octobre, p. 327.

391. Recueil d'observations astronomiques, etc., par A. de Humboldt ; novembre, t. XL, p. 133.

392. Essai sur le principe de population par Malthus; décembre, p. 263.

393. Sur l'influence des idées exactes dans les ouvrages littéraires ; décembre, p. 393.

394. Sur les opérations faites en Espagne pour prolonger la méridienne, etc. ; 1810, janvier, t. XL, p. 13.

395. Traité d'Acoustique, par Chladni ; 1810, janvier, p. 200.

396. Sur la composition chimique des substances végétales ; mars, t. XLI, p. 199.

397. Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société Philomathique ; avril, p. 339.

398. Atlas élémentaire ; avril, p. 466.

399. Notice historique sur Cavendish ; avril, p. 529.

400. Principe organique de l'univers, par G. de la Mardelle ; juin, t. XLII, p. 331.

401. Cours de Mathématiques, par le général Bellavesne ; juin, p. 392.

402. Sur la découverte de l'étain en France ; juin, p. 521.

403. Recherches sur les mœurs des fourmis indigènes, par P. Huber ; juillet, t. XLIII, p. 199, 263.

404. Lettres à Sophie sur la Physique, la Chimie et l'Histoire naturelle ; août, p. 396.

405. Introduction à la Géographie mathématique et critique, et à la Géographie physique, par Lacroix ; 1811, mai, t. XLVII, p. 251.

406. De l'influence des sciences sur les préjugés populaires ; 1812, janvier, t. L, p. 58.

407. Sur l'esprit d'invention et de recherche dans les sciences ; 1814, janvier, t. LVIII.

408. Sur l'état des sciences en France depuis 1789 ; 1815, février, t. LXII.

12° JOURNAL DE L'EMPIRE (JOURNAL DES DÉBATS).

409. Notice historique sur Lagrange, (en commun avec Poisson) ; 1813, 28 avril.

13° JOURNAL DES MINES.

410. Mémoire sur la propagation de la chaleur et sur un moyen simple et exact de mesurer les hautes températures ; 1805, t. XVII, p. 203.

411. *Sur* le tome IV du Traité de Mécanique céleste de Laplace; p. 473.

412 Expériences sur la propagation du son à travers les corps solides, et à travers l'air dans des tuyaux cylindriques très-allongés ; 1808, t. XXIV, p. 319.

413. Notice sur un nouveau genre de besicles, inventé par M. Wollaston ; 1814, t. XXXV, p. 76.

414. Rapport sur un Mémoire de MM. Dulong et Petit, relatif aux lois de dilatation des solides, des liquides et des fluides élastiques à de hautes températures ; 1815, t. XXXVII, p. 429.

14° BIOGRAPHIE UNIVERSELLE.

415. Amontons (Guillaume); 1811, t. II, p. 58.
416. Bailly (Jean-Sylvain); t. III, p. 238.
417. Bergman (Torbern); t. IV, p. 258.
418. Borda (Jean-Charles); 1812, t. V, p. 151.
419. Bouguer (Pierre); 1812, t. V, p. 302.
420. Bradley (Jacques); 1812, t. V, p. 458.
421. Cassini (Jean-Dominique); 1813, t. VII, p. 297.
422. Cavendish (Henri); 1813, t. VII, p. 455.
423. Clouet; t. IX, p. 128.
424. Condamine (Charles-Marie La); t. IX, p. 383.
425. Conté (Nicolas-Jacques); t. IX, p. 506.
426. Copernic (Nicolas); t. IX, p. 544.
427. Coulomb (Charles-Augustin de); t. X, p. 90.
428. Descartes (René); 1814, t. XI, p. 145.
429. Franklin (Benjamin); 1816, t. XV, p. 512.
430. Galilée-Galiléi ; t. XVI, p. 318.
431. Leibnitz (Godefroy-Guillaume baron de); 1819, t. XXIII, p. 594.
432. Malus (Étienne-Louis); 1820, t. XXVI, p. 410.
433. Newcomen; 1822, t. XXXI, p. 121.
434. Newton (Isaac); 1822, t. XXXI, p. 127.
435. Torricelli (Evangelista); 1826, t. XLVI, p. 287.
436. Volta (Alexandre); 1827, t. XLIX, p. 459.
437. Brisson (Barnabé); 1835, t. LIX, P. 268.

15° MÉMOIRES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE DE LA SOCIÉTÉ D'ARCUEIL.

438. Mémoire sur la nature de l'air contenu dans la vessie natatoire des poissons; 1807, t. I, p. 252.

439. Expériences sur la production du son dans les vapeurs ; 1809, t. II, p. 94.

440. Sur l'analyse comparée de l'arragonite et du carbonate de chaux rhomboïdal, etc. (en commun avec Thenard); 1809, t. II, p. 176.

441. Expériences sur la propagation du son à travers les corps solides et à travers l'air dans des tuyaux très-allongés; 1809, t. II, p. 405.

442. Addition au Mémoire sur l'air contenu dans la vessie natatoire des poissons; 1809, t. II, p. 487.

443. Sur une manière d'imiter artificiellement les phénomènes des couleurs produites par l'action des lames minces de mica sur les rayons polarisés; 1817, t. III, p. 106.

444. Sur une loi remarquable qui s'observe dans les oscillations des particules lumineuses, lorsqu'elles traversent obliquement des lames minces de chaux sulfatée ou de crístal de roche, taillées parallèlement à l'axe de cristallisation; 1817, t. III, p. 132.

445. Recherches sur les lois de la dilatation des liquides à toutes les températures; 1817, t. III, p. 191.

446. Examen comparé de la quantité d'action que la force répulsive extraordinaire du spath d'Islande exerce sur les molécules lumineuses de diverses couleurs; 1817, t. III, p. 371.

16° MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES.

NOUVELLE SÉRIE.

447. Mémoire sur le zodiaque circulaire de Dendérah; t. XVI, p. 1.

17° REVUE BRITANNIQUE.

448. Première Lettre à M. Saulnier fils sur les approvisionnements de Paris; 1828, t. XVIII, p. 179.

449. Deuxième Lettre sur le même sujet; 1828, t. XVIII, p. 354.

18° REVUE OU DÉCADE PHILOSOPHIQUE, LITTÉRAIRE ET POLITIQUE.

450. Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes, par Prony.

451. Mémoires sur la chaleur, par le comte de Rumford.

452. Leçons élémentaires de Physique et de Chimie expérimentales, par Izarn.

453. Eléments de l'air de la teinture, par Berthollet.

454. La grande période ou le retour de l'âge d'or, par Delormel.

455. Traité de Mécanique céleste, par Laplace.

19° NOUVELLES ANNALES DU MUSÉUM D'HISTOIRE NATURELLE.

456. Sur l'inflammation de la fraxinelle; t. I, p. 273.

457. Sur un caractère optique à l'aide duquel on reconnaît immédiatement les sucs végétaux qui peuvent donner du sucre analogue au sucre de canne, et ceux qui ne peuvent donner que du sucre semblable au sucre de raisin; t. II, p. 95.

458. Sur les modifications que la fécule et la gomme subissent sous l'influence des acides (en commun avec M. Persoz); t. II, p. 10).

459. Sur le mouvement et la nature de la séve au printemps; t. II, p. 271.

460. Sur les variations d'état lentes ou soudaines qui s'opèrent dans plusieurs combinaisons organiques; t. II, p. 335.

461. Lettre à M. Becquerel sur la végétation; t. II, p. 365.

462. Sur l'application de la polarisation circulaire à l'analyse de la végétation des graminées; t. III, p. 47.

463. Sur l'application des lois de la polarisation circulaire aux recherches de chimie; t. III, p. 502.

19° OUVRAGES PUBLIÉS SÉPARÉMENT.

464. Eléments d'Arithmétique. En tête de l'Algèbre de Clairaut, édition de Lacroix. In-8, 2 vol. Duprat; Paris, 1797.

465. Essai sur l'histoire générale des sciences pendant la Révolution française. In-8, 1 vol. Duprat; Paris, 1803.

466. Essai de Géométrie analytique. 8e édition, in-8, 1 vol. Bachelier; Paris, 1834.

La 1re édition a paru en 1802.

467. Traité élémentaire d'Astronomie physique. 3e édition, in-8, 5 vol. Bachelier et Mallet-Bachelier; Paris, 1841-1857.

La 1re édition en 1 vol. a paru en 1805.

La 2e édition en 3 vol. a paru en 1810-1811.

468. Physique mécanique de Fischer, traduit de l'allemand avec Notes. 4e édition, in-8, 1 vol. Bachelier; Paris, 1830.

La 1re édition a paru en 1805.

469. Tables barométriques portatives. In-8, 1 vol. Klostermann; Paris, 1811.

470. Traité de Physique expérimentale et mathématique. In-8, 4 vol. Déterville; Paris, 1816.

471. Précis élémentaire de physique expérimentale. 3e édition, in-8, 2 vol. Déterville; Paris, 1824.

La 1re édition a paru en 1817.

472. Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques, etc. In-4, 1 vol. Ve Courcier; Paris, 1821.

473. Recherches sur plusieurs points de l'astronomie égyptienne, appliquées aux monuments astronomiques trouvés en Egypte. In-8, 1 vol. Firmin Didot; Paris, 1823.

474. Notions élémentaires de Statique. In-8, 1 vol. Bachelier; Paris, 1829.

475. Lettres sur l'approvisionnement de Paris et sur le commerce des grains. In-8, 1 vol. Bachelier; Paris, 1835.

476. Mélanges scientifiques et littéraires. In-8, 3 vol. Michel Lévy frères; Paris, 1858.

477. Etudes sur l'astronomie indienne et sur l'astronomie chinoise. In-8, 1 vol. Michel Lévy frères; Paris, 1862.

Ce relevé, malgré tous les soins que j'ai mis à le faire, est très-certainement incomplet. Tel qu'il est cependant, j'espère qu'il permettra d'embrasser dans son ensemble la vie scientifique de M. Biot. Il facilitera d'ailleurs les recherches aux personnes qui auraient besoin de recourir à des Mémoires, à des articles ou à des ouvrages spéciaux. J'aurai ainsi atteint le double but que je me suis proposé.

F. LEFORT.

Paris, le 27 mai 1862.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX D'OLRY TERQUEM.

TERQUEM (Olry) naquit à Metz le 16 juin 1782. Sa famille, qui professait la religion israélite, s'était établie depuis longtemps dans cette ville et y avait acquis par le négoce une honorable aisance; mais le père d'Olry, ayant prêté à des émigrés des sommes qui ne purent lui être remboursées, vit sa fortune considérablement réduite, ce qui ne l'empêcha pas de donner à ses enfants une éducation convenable.

Olry (*), comme tous les enfants israélites de l'époque, passa son enfance dans une école où l'on enseignait exclusivement la langue hébraïque. Cet enseignement consistait dans la lecture du Rituel; puis, lorsque l'enfant lisait couramment, ce qui demandait plusieurs années d'exercice, on le mettait à la traduction de la Bible. On traduisait mot à mot, sans indication des lois grammaticales, que d'ailleurs le maître ignorait lui-même. La traduction se faisait en patois messin israélite, sorte de mélange d'allemand, de polonais, de gascon et de mots dénaturés, jusque-là que presque toutes les voyelles avaient été transposées à dessein, afin d'avoir un langage incompréhensible aux autres peuples avec lesquels les juifs avaient des rapports de commerce. Il n'entrait jamais dans l'école ni papier ni encre.

Cet enseignement, si différent de celui de nos colléges,

(*) Ces renseignements sur les premières années de Terquem sont empruntés presque textuellement à une note manuscrite de M. Gerson Levy, de Metz.

produisait cependant de bons résultats. On allait dans ces écoles pour apprendre l'hébreu, et l'on y apprenait l'hébreu, tandis que nos savantes analyses grammaticales ou logiques parviennent rarement à nous faire savoir le latin et presque jamais le grec. A part le patois messin qu'il avait en médiocre estime, M. Terquem approuvait assez l'enseignement des écoles rabbiniques. Il pensait que les langues s'apprennent en lisant beaucoup et en écrivant peu, contrairement à ce qui se pratique dans nos colléges.

A l'âge de douze ans, Olry fut confié à un hébraïsant versé dans les études talmudiques, mais qui suivit les mêmes errements quant au mode d'enseignement. Terquem s'adonna à l'interprétation du Talmud avec une opiniâtreté qui ne le faisait reculer devant aucun obstacle. Il m'a avoué depuis que cette étude lui avait donné le goût des choses difficiles. C'est pour cette raison que les parties des mathématiques qui exigent la plus forte contention d'esprit furent toujours celles qui eurent pour lui le plus d'attrait.

Il arrive souvent qu'on estime ce que l'on possède moins pour sa valeur intrinsèque que par ce qu'il a coûté à acquérir. Terquem avait aperçu de bonne heure le danger de ces rêveries dont le Talmud est rempli (*) : il l'avait évité et il le signala plus tard en ces termes : « Rien n'est contagieux comme les folies transcendantes : la plus forte intelligence peut y faire naufrage; lorsqu'on a longtemps médité sur certaines aberrations abstruses et qu'on n'a épargné aucune peine pour les comprendre,

(*) « Je ne connais pas M. M., écrivait-il en 1837, mais je sais qu'il a passé ou, pour mieux dire, qu'il a perdu sa jeunesse dans l'étude *la plus stérile, la plus niaise, la plus sotte, la plus inepte, la plus abrutissante,* lorsqu'elle est isolée : dans l'étude exclusive du Talmud. » (9e lettre tsarphatique, p. 30 et 31.)

alors par l'instigation de l'inévitable démon qui a nom *amour-propre*, on finit par se dissimuler l'extravagance de ces recherches, par en proclamer même l'importance et en soutenir la réalité ontologique (*). »

Vers 1794, Olry Terquem fut pourvu d'un précepteur de langue allemande; voici à quelle occasion. L'aîné des enfants, Elie Terquem, fut indûment porté sur la liste des émigrés. Pour éviter un emprisonnement et une condamnation qui en était presque toujours la suite, Elie se réfugia à Trèves, puis à Coblentz. Là, mis en rapport avec l'élite de la population israélite, il fut frappé de l'étendue de son savoir et chercha à importer dans son pays et dans sa famille les mêmes moyens d'étude. Il chercha et fut assez heureux pour trouver un jeune homme intelligent qui voulut bien accepter les fonctions de précepteur. Olry Terquem étudia encore avec ce jeune homme la langue hébraïque, mais il entendit pour la première fois un allemand pur et contracta le goût de la haute littérature germanique.

Dès la fondation de l'Ecole Centrale, Olry Terquem fréquenta assidûment cet établissement qui était ouvert aux enfants de tous les cultes. Il y fit de rapides progrès dans les lettres et dans les sciences : mais il eut de grandes difficultés à vaincre. Pendant sa première enfance, il n'avait parlé que le jargon messin. Jamais dans la maison paternelle on ne faisait usage de la langue française. De là une certaine difficulté à s'exprimer en français, qui le rendait timide avec ses camarades et l'empêchait de former aucune liaison avec eux. Cet isolement tourna au profit de ses études, mais lui fut préjudiciable dans ses examens. Il échoua la première fois qu'il tenta d'entrer à l'Ecole Polytechnique.

(*) *Journal de M. Liouville*, t. VI, p. 295.

A cette époque (1800) un hasard heureux amena à Metz un homme éminent par son savoir : versé dans l'étude des langues sémitiques, philosophe de l'école allemande, profond géomètre, Ensheim devint non le maître, mais l'ami d'Olry Terquem, avec lequel il entretint une correspondance pendant toute sa vie.

L'année suivante, Olry se présenta de nouveau à l'Ecole Polytechnique et y fut admis dans un bon rang, le 9 brumaire an X (31 octobre 1801). A la fin de son cours d'études, il fut attaché à l'École en qualité de *chef de division* (*), adjoint aux répétiteurs d'analyse et de mécanique. Il quitta cet emploi le 19 avril 1804 pour aller occuper au lycée de Mayence la chaire de mathématiques transcendantes. A cette place il joignit en 1811 celle de professeur à l'école d'artillerie de la même ville. Le diplôme de docteur ès sciences lui fut accordé d'office et sans examen le 5 mars 1812.

En 1814, les revers de nos armes contraignirent Terquem à quitter Mayence. L'Université, qui avait su apprécier son mérite, lui offrit la chaire de mathématiques spéciales au lycée de Rheims : mais il refusa cette place ainsi que celle de professeur à l'école d'artillerie de Grenoble. Terquem voulait rester à Paris, où son ardente curiosité pour tous les genres de connaissances devait trouver plus d'aliments. C'est alors que l'emploi de bibliothécaire au Dépôt d'Artillerie, avec le titre de professeur attaché au Comité, lui fut proposé.

(*) « On voulut trouver un nouveau moyen de police et même d'instruction dans l'établissement de deux nouveaux fonctionnaires choisis parmi les élèves qui, ayant terminé leurs cours d'études, n'étaient pas encore admis, faute de places vacantes, dans les écoles des services de leur choix. Sous les titres de chefs surveillants, *chefs de division*, sous-inspecteurs, chacun d'eux était chargé de la police d'une division et veillait à ce que les chefs de brigade remplissent exactement leurs fonctions. » (FOURCY, *Histoire de l'École Polytechnique*, p. 241. Paris, 1828.)

Cet emploi lui convenait trop pour qu'il ne l'acceptât pas avec empressement. Il le remplit jusqu'à sa mort avec un zèle qui ne se démentit jamais. Grâce à ses judicieuses acquisitions, la bibliothèque du Dépôt, qui ne comptait en 1814 que 300 ouvrages, devient bientôt un des établissements les plus complets en son genre. Les officiers d'artillerie n'y trouvaient pas seulement des livres, mais encore un bibliothécaire dont l'inépuisable complaisance mettait à leur disposition tous les renseignements que pouvait fournir sa prodigieuse mémoire. M. le général de Bressoles (*), éloquent interprète du corps de l'artillerie, nous représente ainsi Terquem au milieu de ses occupations de tous les jours et dans ce cabinet où avaient passé deux ou trois générations d'officiers : « Son cabinet!... ainsi s'appelait cette simple salle d'attente de la bibliothèque, ouverte à tout venant, où, toujours debout comme dans un autre Portique, appuyé sur un carton déformé, au-dessus duquel se dessinaient ses traits fortement accentués et sa luxuriante chevelure, se tenait notre maître, notre oracle!... Vous l'eussiez pu demander à nos illustres devanciers, aux Pernetty, aux Valée, aux Le Nourry, en qui Terquem avait trouvé plutôt des amis que des chefs; demandez-le aujourd'hui encore à notre savant camarade le général Piobert, qui passait auprès de lui chaque jour ses meilleures heures, tout ce qu'il y avait à apprendre, à retenir de ces intéressantes causeries, où l'érudition était tempérée par une aménité parfaite et égayée par des saillies aussi spirituelles qu'originales. »

Les archives du Comité de l'Artillerie renferment de nombreux Rapports de Terquem sur des sujets que le Comité lui renvoyait et des analyses d'ouvrages concernant

---

(*) Discours prononcé aux funérailles de Terquem.

l'art militaire, écrits en allemand ou dans les langues d'origine germanique; services importants qui furent récompensés en 1828 par la croix de chevalier de la Légion d'honneur et en 1852 par celle d'officier.

Travailleur infatigable, il trouvait encore le temps d'écrire des ouvrages élémentaires et de composer des articles pour des journaux scientifiques ou religieux. Les Lettres tsarphatiques sur la réforme du culte judaïque, publiées de 1821 à 1837, excitèrent une vive polémique dans les journaux israélites. Comme tous ceux qui proposent des réformes, Terquem eut d'ardents adversaires, dont l'un même le compara à un *monstre vomi par l'enfer*. A ces maladroites injures, Terquem opposa des raisons de bon aloi, aiguisées par la plus fine ironie. En général, les Lettres tsarphatiques, écrites d'un bout à l'autre sur le ton de la meilleure plaisanterie, sont d'une lecture très-attachante.

Nous ne croyons pas que Terquem ait converti un grand nombre de ses coreligionnaires; il ne l'espérait pas beaucoup lui-même. Il publiait ce qu'il croyait être la vérité: c'était son devoir; le reste ne le regardait pas. D'ailleurs, religieux sans fanatisme et sans superstition, il ne haïssait que l'oppression et l'injustice: il avait coutume de dire que pour lui tous les honnêtes gens étaient orthodoxes et tous les coquins hérétiques (*).

En 1841, M. Gerono, désirant fonder un journal destiné aux élèves de mathématiques spéciales, confia son projet à Terquem et lui proposa de prendre part à la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Le

---

(*) Il a répété cette profession de foi dans une lettre adressée au rédacteur de la *Revue de l'Instruction publique* (n° du 11 avril 1862). Il ajoutait : « Octogénaire, sur le point de partir, je fais cette profession sur le bord de la tombe. »

savant bibliothécaire s'associa à cette entreprise avec une ardeur qui ne s'est jamais démentie. Pendant vingt années, il ne cessa de prendre connaissance de tout ce qui paraissait d'important sous le rapport scientifique, en France et à l'étranger, et de correspondre avec des savants de tous les pays. Outre un grand nombre d'articles originaux, les Annales contiennent une foule d'extraits faits par lui d'ouvrages parus à l'étranger. Bien des méthodes nouvelles ont trouvé en Terquem un zélé propagateur; bien des talents naissants ont reçu de lui de ces encouragements si décisifs au début d'une carrière.

En 1855, il joignit aux *Nouvelles Annales* un *Bulletin d'Histoire*, *de Biographie et de Bibliographie mathématiques,* utile appendice destiné à répandre en France le goût des recherches historiques.

C'est ainsi que toujours travaillant, s'instruisant et instruisant les autres, Terquem s'avançait dans la vie, sans que son ardeur parût diminuer avec les années. Jouissant d'une modeste aisance, heureux par sa famille (*), par ses amis, par ses occupations mêmes qui faisaient le charme de sa laborieuse existence, il pouvait espérer donner un de ces exemples de longévité dont l'histoire des sciences offre des exemples. Mais sa santé reçut en 1861 une première et douloureuse atteinte qu'il supporta avec une fermeté stoïque. Après une courte interruption, Terquem reprit ses travaux, sans se dissimuler que le terme de sa vie était proche, mais sans que cette

---

(*) Marié vers 1820, Terquem a laissé trois fils et deux filles. L'aîné des trois fils est professeur d'hydrographie à Dunkerque; les deux autres sont officiers d'artillerie. Le premier, Paul Terquem, a traduit de l'anglais la *Géographie physique de la mer* et de l'allemand la *Trigonométrie loxodromique* de Grunert. Le second, Charles, est auteur de plusieurs Mémoires estimés sur les canons rayés. Le troisième, Alfred, est sous-lieutenant élève à l'École de Metz.

perspective, qui n'avait rien d'effrayant pour lui, ôtàt quelque chose à la sérénité de son esprit, à cette douce gaîté qui rendait son commerce si aimable. Vers la fin d'avril 1862, il fut pris de la courte maladie qui devait l'enlever. Il s'alita le 2 mai, le 6 il n'était plus.

Le 8 mai, un nombreux cortége (*) de parents et d'amis accompagnait l'homme de bien à sa dernière demeure, et l'un de ses amis, le général de Bressoles, faisait en quelques paroles émues l'éloge de ses vertus et de ses talents: « Puisse, dit le général dans ce suprême adieu, puisse la certitude de voir son nom dignement perpétué dans l'arme où ne cessera de le protéger une mémoire honorable, contribuer à adoucir la douleur de cette patriarcale famille, de cette épouse dévouée, donnant à ses enfants l'exemple du courage et de la résignation, ces enfants auxquels, à défaut de fortune, leur père aura laissé un inépuisable trésor de vertus et de savoir ! »

Terquem était remarquable par un ensemble de connaissances qu'on ne trouve presque jamais réunies dans le même savant. Profondément versé dans l'étude des langues sémitiques, il possédait encore les langues classiques et celles d'origine germanique. Il s'intéressait à tous les travaux de l'esprit et se tenait au courant de leurs plus récents progrès. En philosophie, il était disciple de Kant. Mais au-dessus de Kant et de tous ceux qui ont brillé par le génie, il plaçait trois hommes : Aristote, Leibniz, Voltaire.

Les derniers travaux de Terquem ont été consacrés à l'étude de la nature, qu'il considérait comme une révéla-

---

(*) On y remarquait, dans l'ordre militaire, MM. les généraux Lebœuf, de Bressoles, Piobert, Courtois d'Hurbal, Mazure, Rougeoux; les colonels Emy, de Villegy, Lassus, Brunel, etc.; dans l'ordre civil, MM. Chasles, Bienaymé, Bertrand, Vincent, membres de l'Institut; MM. Catalan, Gerono, Le Besgue, Serret ,professeurs, etc.

tion permanente de celui que Platon appelle l'*éternel géomètre*. Le 25 avril, onze jours seulement avant sa mort, il écrivait à M. Chasles, qui lui avait prêté le traité de Borelli, *De motu animalium* :

« Vous m'avez appris à supporter avec patience les jours qu'il me reste encore à passer ici. L'ouvrage de Borelli est un petit chef-d'œuvre qui me procure des heures délicieuses. On voit l'avantage qu'il y a aux anatomistes d'être géomètres. Il est à désirer qu'on fasse sur le même plan une nouvelle édition de l'*Anatomie descriptive* de Richerand. Ce serait une excellente acquisition. Malheureusement nos anatomistes sont peu géomètres et nos médecins sont de faibles chimistes. Dieu, qui améliore tout, amènera quelque perfection dans ces sciences. Je crois que l'intelligence humaine approche *asymptotiquement* de l'intelligence divine. Espérons! Je rendrai compte de cet ouvrage dans mon *Bulletin*... »

Les dernières pensées de Terquem furent donc pour Dieu et pour la science. On ne pouvait mieux terminer une vie consacrée tout entière à la recherche et à la propagation de la vérité. E. PROUHET.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages publiés séparément.

Manuel d'Algèbre. In-18; 1re édition, 1828; 2e édition, 1834. Paris, Roret.

Manuel de Géométrie. In-18; 1re édition, 1829; 2e édition, 1835. Paris, Roret.

Manuel de Mécanique. In-18; 3e édition, 1851. Paris, Roret.

Exercices de Mathématiques élémentaires. In-8; 1842. Bachelier.

Hutton. — *Nouvelles expériences d'Artillerie* (traduction). In-4; 1826.

Lettres d'un Israélite français à ses coreligionnaires ou *Lettres Tsarphatiques*. 9 brochures in-8, publiées de 1821 à 1837.

Ouvrages périodiques.

Terquem a écrit dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*, les *Annales de Gergonne*, le *Bulletin de Férussac*, le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, le *Bulletin de Bibliographie*, la *Revue de l'Instruction publique* et plusieurs journaux israélites. La liste de ses articles est trop longue pour trouver place ici.

Ouvrages inédits.

Hoyer. — *Histoire de l'Art de la Guerre.* Traduction de l'ouvrage intitulé : *Geschichte der Kriegskunst.* 2 volumes; 1797-1800.

Bibliographie de l'Art militaire (inachevé).

Histoire de l'Artillerie (inachevé).

Commentaires sur la Mécanique céleste. Ces Commentaires ont été offerts à l'Académie des Sciences par les fils de l'auteur (*Comptes rendus*, t. LV, p. 603).

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME VIII.)

Analyses et Comptes rendus.

Pages.

Extraits et Résumés

Histoire et Bibliographie.

Variétés.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.









